МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ВЛАДИМИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е. П. Разбитная, В. С. Захаров

КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Книга 1

ОСНОВЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Учебное пособие
для студентов физико-математических факультетов
педагогических вузов

ВЛАДИМИР 1998

УДК 531.01 (075.8)

Е. П. Разбитная, В. С. Захаров.

Основы классической механики. Учебное пособие для студентов физ.-мат.фак.пед.вузов. – Владимир: ВГПУ, 1998. –116 с.

Основы классической механики представляют первую часть курса теоретической физики, подготовленного на кафедре теоретической физики Владимирского педагогического университета. Книга охватывает основные вопросы классической механики, предусмотренные программой для педвузов. Достоинством пособия является небольшой объем, что очень существенно, так как оно предназначено студентам педвуза.

Ответственный редактор: д-р физ.-мат.наук *В. Г. Рау*
Рецензент: кандидат технических наук *М. Г. Григорьев*

Печатается по решению редакционно-издательского совета ВГПУ

ISBN 5–87846–013–0

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Читая студентам много лет курс классической механики, авторы пришли к выводу, что имеющиеся многочисленные учебные пособия по механике очень подробны и главное очень объемны по содержанию. При том числе учебных часов, которое в настоящее время отводится на изучение классической механики в курсе теоретической физики для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов, студенты должны иметь достаточно краткое пособие по классической механике. В результате появилась эта работа «Основы классической механики».

Мы надеемся, что нам удалось остановиться на наиболее значимых вопросах и что наше пособие будет пользоваться определенным успехом у студентов. Мы стремились при полном математическом обеспечении курса наибольшее внимание уделять физической стороне рассматриваемых вопросов.

Наше участие в написании пособия распределилось следующим образом: §§ 1—18 написаны Е. П. Разбитной, §§ 19—27 — В. С. Захаровым.

Все замечания и пожелания, которые читатели выскажут нам, будут нами приняты с искренней благодарностью.

Авторы

I. ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Основные понятия классической механики

1.1. ПРЕДМЕТ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Механика как раздел физики изучает наиболее простую из всех форм движения материи — механическое движение.

В конце XIX в. считалось, что построение механики завершено, физиков беспокоили лишь два «облачка» на небе физики: результаты опыта Майкельсона[1] и теория излучения твердых и жидких тел. Из первого «облачка» родилась релятивистская механика (теория относительности) — механика больших скоростей. Второе «облачко» привело к возникновению квантовой механики — механики микромира.

Классическая механика изучает движение в макромире, она является наукой о механическом движении макротел и их механическом взаимодействии, при этом классическая механика не рассматривает природы взаимодействий. Под механическим движением понимается перемещение тела в пространстве с течением времени, т. е. изменение положения тела в пространстве и во времени.

1.2. ОБЪЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

При изучении движения реальных тел приходится абстрагироваться от ряда свойств этих тел, т. е. рассматривать некоторые модели их. Объектами изучения классической механики являются твердое тело, материальная точка и система материальных точек.

Материальная точка — это точка, обладающая определенной массой. (Во многих случаях размеры движущихся тел можно не учитывать).

Совокупность тел, размерами которых пренебрегают, образует систему материальных точек. Твердое тело — это тело с

---

[1] Майкельсон Альберт Абрахам (1852—1931) — американский физик, Лауреат Нобелевской премии 1907 г.

неизменяющимися размерами (не подверженное деформации), его можно рассматривать как особую систему материальных точек.

1.3. ПРОСТРАНСТВО И ВРЕМЯ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Движение тел происходит в пространстве и во времени. Пространство и время — формы существования материи — являются исходными понятиями в физической теории.

Свойства реального пространства, полученные из обобщения непосредственного опыта в условиях Земли, привели к следующим представлениям о пространстве: пространство неизменно, простирается бесконечно, свойства его во всех точках совершенно одинаковы (однородность пространства), все направления в пространстве равноправны (изотропность пространства). Такое пространство получило название абсолютного пространства (понятие ввел И. Ньютон). Абсолютное пространство бесконечно, однородно, и изотропно. Его свойства совершенно не зависят от материи, которая наполняет это пространство. Свойства абсолютного пространства нашли отражение в геометрии Евклида (III в. до н. э.).

Время в классической механике также считается не зависящим от материи, оно абсолютно и универсально: течет совершенно одинаково в любых точках пространства. Время однородно: можно установить одновременность событий на телах, движущихся как угодно и где угодно. Время непрерывно, это значит, что каждому моменту времени можно привести в соответствие точку на бесконечной прямой — оси времени. Это абсолютное время.

Абсолютное пространство и абсолютное время классической механики, несмотря на абстракции, касающиеся их свойств, отражают свойства реальных пространства и времени.

1.4. СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

Обнаружить перемещение тела в однородном и изотропном пространстве невозможно, так как одна область абсолютного пространства ничем не отличается от другой. Это можно сделать, если движение тела рассматривать относительно какого-либо другого тела, тела отсчета. В этом состоит относительность движения.

Обычно с телом отсчета связывают некоторую систему координат, в которой все точки пространства задаются числами — координатами, для чего выбирают единицу расстояния и вводят масштаб. Тогда положение движущейся точки отмечается координатами. Для описания движения во времени вводят способ фиксации моментов времени (часы).

Тело отсчета и связанная с ним система координат с масштабом расстояний и способом счета времени образуют систему отсчета, относительно которой рассматривают механическое движение тел.

Совершенно очевидно, что в разных системах отсчета одно и то же движение имеет разный вид. Так, свободно падающее тело (капли дождя) в системе отсчета, связаной с Землей, двигается по вертикали, а наблюдателю, находящемуся в равномерно и прямолинейно движущемся по горизонтали вагоне (вторая система отсчета), это движение будет казаться происходящим по параболе. И законы движения в разных системах отсчета имеют разный вид. Желательно использовать такие системы отсчета, в которых законы механики выглядели бы наиболее просто. Такие системы отсчета называются инерциальными. Именно по отношению к ним пространство однородно и изотропно, а время однородно.

Частным случаем инерциальной системы отсчета является абсолютно неподвижная система отсчета, которую ввел И. Ньютон. Ньютон считал, что абсолютное пространство неподвижно и что с ним можно связать неподвижную инерциальную систему отсчета. Хотя абсолютно неподвижных систем отсчета не существует, во многих задачах движение рассматривается относительно неподвижной (или условно неподвижной), т. е. инерциальной системы отсчета. Такую систему отсчета обычно называют абсолютной.

1.5. РАЗДЕЛЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Раздел механики, в котором движение изучается без учета причин, вызывающих это движение, т. е. чисто геометрически, называется *кинематикой*. Основоположником считается Галилео Галилей (1564—1642).

Раздел механики, изучающий движение с учетом причин, вызывающих это движение, т. е. с учетом взаимодействий между телами, называется *динамикой*. Основоположником является Исаак Ньютон (1643—1727). В механике Ньютона взаимодействие между телами характеризуется силой, поэтому механика Ньютона — силовая механика. Основоположником энергетической механики (аналитической механики) является Жозеф Луи Лагранж (1736—1813).

Частный случай динамики, когда имеет место относительный покой (равновесие тел), называется *статикой*. Основоположником считается Архимед (287—212 гг. до н. э.).

Динамика и статика вместе называются кинетикой.

§ 2. Способы задания движения материальной точки

Задача механики состоит в определении положения движущейся точки (системы точек) в выбранной системе отсчета в любой момент времени. Это значит, что должно быть известно, что движется (объект движения), относительно чего (система отсчета) и как движется (способ задания движения).

Мы рассмотрим естественный, векторный и координатный способы задания движения точки.

2.1. ВЕКТОРНЫЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Положение движущейся точки определяется (задается) радиусом-вектором относительно некоторого тела отсчета (начала системы координат) в виде векторной функции $\vec{r} = \vec{f}(t) = \vec{r}(t)$[1]. Значение радиуса-вектора в заданный момент определяет положение точки. Траектория точки (линия, по которой движется точка) представляет собой годограф вектора $\vec{r}$, т. е. геометрическое место концов радиуса-вектора точки (рис. 1).

Направление радиуса-вектора можно задать единичным вектором (ортом) $\vec{r}^0 = \vec{r}^0(t)$, тогда $\vec{r} = r(t) \cdot \vec{r}^0(t)$. Для упрощения записи $\vec{r} = r\vec{r}^0$. Вектор элементарного перемещения движущейся точки $d\vec{r}$ (изменение вектора $\vec{r}$ за бесконечно малый промежуток времени dt) находится как дифференциал векторной функции

$$d\vec{r} = dr\vec{r}^0 + rd\vec{r}^0 .$$

2.2. ЕСТЕСТВЕННЫЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Задается траектория движения (аналитически или графически), на траектории указывается точка отсчета расстояний O (рис. 2). Положение движущейся точки на траектории определяется расстоянием до нее от точки O, отсчитанным по траектории; это расстояние обычно задается в виде функции времени $s = s(t)$.

Так, при равномерном движении точки эта функция имеет вид: $s = vt + s_0$, где v — скорость движения, а s_0 — расстояние движущейся точки от точки отсчета расстояний в начальный момент времени, который обычно полагается равным нулю. Следует заметить, что зависимость $s = s(t)$ для движущейся

[1] Далее для функции будем использовать ту же букву. Модуль вектора будем обозначать без стрелки сверху, проекцию вектора на некоторую ось l в виде r_l.

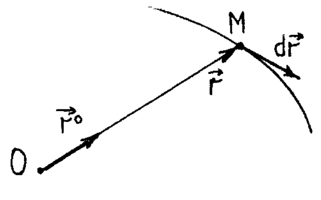


Рис.1

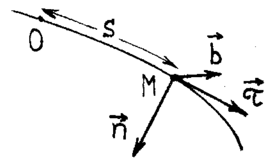


Рис.2

точки ничего не говорит о ее траектории. Плоскую траекторию можно задать, например, радиусом кривизны в виде функции времени $\varrho = \varrho(t)$[1].

При естественном способе задания движения с каждой точкой траектории можно связать прямоугольную систему координат, определяемую единичными векторами касательной, главной нормали и бинормали, естественный трехгранник $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$. Оси $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ **образуют правовинтовую систему** координат. За положительное направление отсчета расстояний по траектории от точки O принимается направление единичного вектора $\vec{\tau}$. Вектор $\vec{n}$ направлен по радиусу кривизны траектории в данной точке. Плоскость, в которой лежат касательная и главная нормаль, называется соприкасающейся плоскостью. В случае плоской траектории движение точки происходит в соприкасающейся плоскости.

2.3. КООРДИНАТНЫЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Движение точки задается координатами, которые являются функциями времени и называются уравнениями движения точки. В декартовой прямоугольной системе координат (мы будем использовать только правую систему) уравнения движения точки имеют вид (рис. 3):

$$x = x(t),$$
$$y = y(t),$$
$$z = z(t).$$

Для плоского движения бывает удобно использовать полярную систему координат (рис. 4): OX — полярная ось; O —

[1] Радиус кривизны в данной точке траектории как некоторой линии можно определить как радиус предельной окружности, проходящей через рассматриваемую точку на линии и еще через две близкие к ней точки линии. Радиус кривизны окружности постоянен и во всех точках равен радиусу этой окружности, $\varrho = R = \text{const}$. Радиус кривизны прямой линии равен «бесконечности», $\varrho = \infty$.

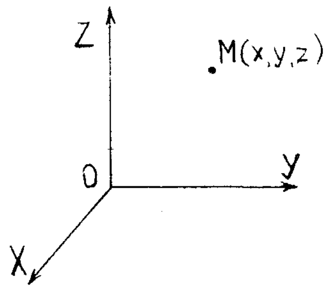


Рис.3

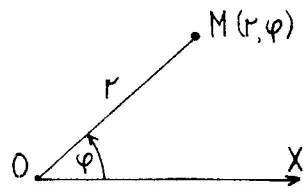


Рис.4

полюс, $r = OM$ — расстояние точки M от полюса, φ — полярный угол точки M. Уравнения движения точки в полярных координатах имеют вид:

$$r = r(t),$$
$$\varphi = \varphi(t).$$

Так как движение точки непрерывно, то все функции, которыми задается ее движение: $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $s = s(t)$; $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$; $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ — должны быть непрерывны, однозначны и дважды дифференцируемы.

2.4. СВЯЗЬ МЕЖДУ РАЗНЫМИ СПОСОБАМИ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Разные способы задания движения точки связаны между собой, поэтому легко перейти от одного к другому.

Если радиус-вектор $\vec{r}$ точки отмечать относительно начала декартовой системы координат, оси которой заданы ортами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ (рис. 5), то связь между радиусом-вектором точки $\vec{r} = \vec{r}(t)$ и ее уравнениями движения $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ имеет вид:

$$\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} + r_z\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

где координаты движущейся точки в данный момент представляют собой проекции радиуса-вектора на координатные оси.

Вектор элементарного перемещения точки

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k},$$

его значение (модуль)

$$dr = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}.$$

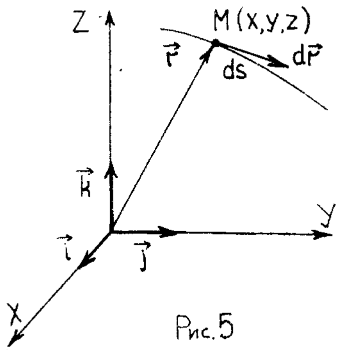


Рис.5

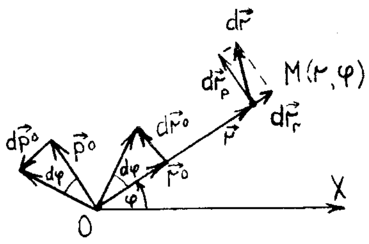


Рис.6

Вектор $d\vec{r}$ всегда направлен по касательной к траектории, а численно равен элементарному расстоянию ds, отсчитанному по траектории, $dr = ds$, и поэтому $d\vec{r} = ds\vec{\tau}$ и

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}\ .$$

Из уравнений движения, исключив время (параметр t), можно получить траекторию, а ds позволяет найти $s = s(t)$, для чего нужно взять интеграл

$$s = \int ds + C;$$

постоянная интегрирования C определяется по начальным условиям.

В случае задания движения точки полярными координатами $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ удобно ввести орты радиального направления $\vec{r}^0 = \vec{r}^0(t)$ и перпендикулярного ему поперечного направления $\vec{p}^0 = \vec{p}^0(t)$. Тогда радиус-вектор точки можно выразить в виде $\vec{r} = r\vec{r}^0$. При бесконечно малом изменении полярного угла точки $d\varphi$ (рис. 6)

$$d\vec{r}^0 = r^0 d\varphi \vec{p}^0 = d\varphi \vec{p}^0; \quad d\vec{p}^0 = -d\varphi \vec{r}^0.$$

Вектор

$$d\vec{r} = dr\vec{r}^0 + rd\vec{r}^0 = dr\vec{r}^0 + rd\varphi\vec{p}^0 = d\vec{r}_r + d\vec{r}_p.$$

II. КИНЕМАТИКА

§ 3. Кинематические характеристики абсолютного движения точки

Абсолютным движением называют движение относительно неподвижной (или условно неподвижной) системы отсчета, т. е. в инерциональной системе отсчета (ИСО).

3.1. ВЕКТОРНЫЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Величины, полностью описывающие движение геометрически, называются кинематическими характеристиками движения. К ним относятся радиус-вектор точки, вектор скорости и вектор ускорения.

Радиус-вектор — это величина, которая определяет положение движущейся точки в любой момент времени. Для этого он должен быть задан как известная функция времени, $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Вектор скорости — это физическая величина, характеризующая изменение положения движущейся точки через изменение ее радиуса-вектора (за единицу времени). Вектор скорости выражается первой производной по времени от радиуса-вектора точки,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

(производную по времени принято обозначать точкой). Вектор скорости характеризует изменение радиуса-вектора точки и по модулю и по направлению.

Вектор ускорения — это физическая величина, характеризующая изменение вектора скорости движущейся точки (за единицу времени), выражается первой производной по времени от вектора скорости, или второй производной по времени от радиуса-вектора точки,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}\ .$$

3.2. КООРДИНАТНЫЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ

а). Декартовы координаты. Движение точки задано уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ (рис. 5). Чтобы получить выражение вектора скорости через координаты точки, надо взять производную от радиуса-вектора

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} ,$$

где $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ — проекции вектора скорости на координатные оси:

$$\dot{x} = v\cos(\vec{X} \widehat{\ } \vec{v}),\ \dot{y} = v\cos(\vec{Y} \widehat{\ } \vec{v}),\ \dot{z} = v\cos(\vec{Z} \widehat{\ } \vec{v}) .$$

Модуль вектора скорости находится по теореме Пифагора

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} .$$

Вектор ускорения $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$, его модуль равен

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} ,$$

а проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси выражаются формулами:

$$\ddot{x} = a\cos(\vec{X} \widehat{\ } \vec{a}),\ \ddot{y} = a\cos(\vec{Y} \widehat{\ } \vec{a}),\ \ddot{z} = a\cos(\vec{Z} \widehat{\ } \vec{a}) .$$

б) Полярные координаты. Уравнения плоского движения точки $r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$. Чтобы найти выражение вектора скорости точки в полярных координатах, надо взять производную по времени от радиуса-вектора точки $\vec{r} = r\vec{r}^0$, помня, что единичный вектор $\vec{r}^0 = \vec{r}^0(t)$:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(r\vec{r}^0) = \dot{r}\vec{r}^0 + r\ \dot{\vec{r}}^0 = \dot{r}\vec{r}^0 + r\dot{\varphi}\vec{p}^0 .$$

Получается, что вектор скорости в полярных координатах разлагается на две взаимно перпендикулярные составляющие: радиальную составляющую $\vec{v}_r = \dot{r}\vec{r}^0$, направленную по радиусу-вектору точки, и поперечную (трансверсальную) составляющую, направленную перпендикулярно (поперек) радиусу-вектору точки,

$$\vec{v}_p = r\dot{\varphi}\vec{p}^0;\ \vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_p .$$

Проекции вектора скорости на направление радиуса-вектора точки и на направление, перпендикулярное радиусу-вектору, называются соответственно радиальной скоростью и поперечной скоростью. Их выражения через полярные координаты точки $v_r = \dot{r}$, $v_p = r\dot{\varphi}$, а модуль вектора скорости (рис. 7)

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2} .$$

Чтобы найти выражение вектора ускорения точки в полярных

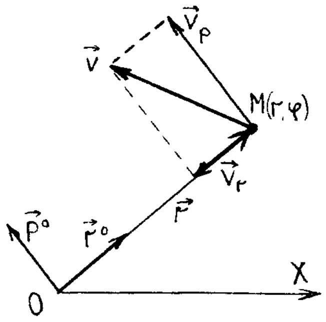


Рис.7

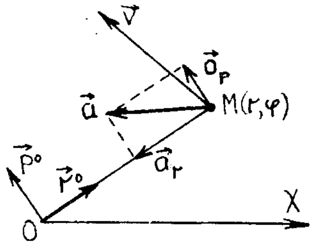


Рис.8

координатах, надо взять производную по времени от вектора скорости:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\vec{r}^0 + r\dot{\varphi}\vec{p}^0) .$$

После дифференцирования и преобразований получим

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\,\vec{r}^0 + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\,\vec{p}^0.$$

Вектор ускорения в полярных координатах, как и вектор скорости, разлагается на радиальную и поперечную составляющие $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_p$ (рис. 8). Проекции вектора ускорения на направление радиуса-вектора и на направление, перпендикулярное радиусу-вектору, называются соответственно радиальным ускорением и поперечным ускорением:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2,\ a_p = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} .$$

3.3. ЕСТЕСТВЕННЫЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Траектория может быть задана радиусом кривизны $\varrho = \varrho(t)$ (§ 2. 2). С точкой связан естественный трехгранник $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$. Вектор скорости можно представить в виде

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau} = \dot{s}\vec{\tau} ,$$

так как $d\vec{r} = ds\vec{\tau}$ (§ 2.4). Вектор скорости всегда направлен по касательной к траектории.

Получим выражение вектора ускорения.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\vec{\tau}) = \ddot{s}\vec{\tau} + \dot{s}\,\frac{d\vec{\tau}}{dt} .$$

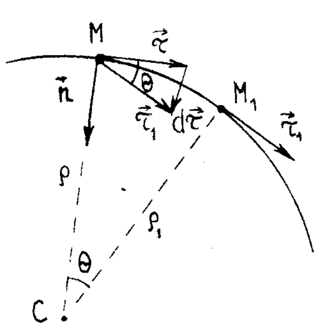


Рис.9

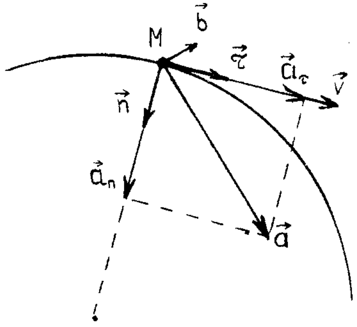


Рис.10

Используя рис. 9, имеем $MM_1 = ds = \varrho\Theta$, $d\vec\tau = \tau\Theta\vec n = \frac{ds}{\varrho}\vec n$,

$$\frac{d\vec\tau}{dt} = \frac{1}{\varrho}\frac{ds}{dt}\vec n = \frac{\dot s}{\varrho}\vec n \text{ и } \vec a = \ddot s\vec\tau + \frac{\dot s^2}{\varrho}\vec n .$$

Вектор ускорения разлагается при естественном способе задания движения на касательную и нормальную составляющие. Проекции вектора ускорения на касательное и нормальное направления называются соответственно касательным и нормальным ускорением,

$$a_\tau = \ddot s, \ a_n = \frac{\dot s^2}{\varrho} .$$

Модуль вектора ускорения (рис. 10)

$$a = \sqrt{\ddot s^2 + \left(\frac{\dot s^2}{\varrho}\right)^2}$$

Проекция вектора ускорения на бинормаль всегда равна нулю, вектор ускорения лежит в соприкасающейся плоскости.

§ 4. Кинематические характеристики движения твердого тела и выражение кинематических характеристик его точек

4.1. ЗАДАНИЕ ДВИЖЕНИЯ СВОБОДНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА И ЕГО ТОЧЕК

Задача механики — уметь определить в любой момент времени в заданной системе отсчета положение каждой точки тела, если задано движение тела относительно этой системы отсчета.

Движение свободного твердого тела относительно неподвижной системы отсчета K (рис. 11) можно разложить на поступательное движение со скоростью произвольной точки O' и вращательное движение с некоторой мгновенной угловой скоростью $\vec\omega$ вокруг точки O', т. е. задать движение тела двумя векторными уравнениями

$$\vec r_{0'} = \vec r_{0'}(t) ,$$
$$\vec\omega = \vec\omega(t) .$$

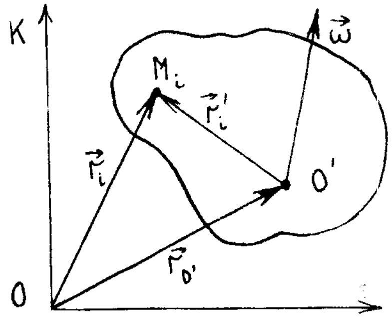


Рис.11

(Вместо векторов можно взять их проекции на оси системы K).
Тогда движение любой точки тела M_i относительно системы K можно задать радиусом-вектором

$$\vec r_i = \vec r_{0'} + \vec r_i' .$$

Радиус-вектор $\vec r_i' = \vec r_i'(t)$ описывает движение i-ой точки тела, обусловленное вращением тела относительно точки O'.

4.2. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

а). Поступательное движение. Тело не вращается вокруг оси O', т. е. движется так, что любая прямая, соединяющая две точки тела, перемещается параллельно самой себе: $\vec\omega = 0$, $\vec r_i' = \text{const}$.

Поступательное движение тела задается радиусом-вектором любой точки O' тела $\vec r_{0'} = \vec r_0(t)$.

Движение любой (i-ой) точки тела относительно системы K определяется радиусом-вектором $\vec r_i = \vec r_{0'} + \text{const}$.

б). Вращение тела вокруг неподвижной точки. При таком движении одна точка тела O' относительно системы K остается в покое, $\vec r_{0'} = \text{const}$, а $\vec r_i' = \vec r_i'(t)$.

В этом случае начало системы K удобнее совместить с точкой O', тогда $\vec r_{0'} = 0$, $\vec r_i' = \vec r_i$. Уравнение $\vec\omega = \vec\omega(t)$ задает вращение тела вокруг неподвижной точки.

в). Вращение тела вокруг неподвижной оси. При таком движении тела направление вектора угловой скорости остается постоянным и совпадает с направлением оси вращения. Если представить $\vec\omega = \omega\vec\omega^0$, то $\omega = \omega(t)$, а $\vec\omega^0 = \text{const}$. Точка O' неподвижна, т. е. $\vec r_{0'} = \text{const}$.

В этом случае начало неподвижной системы K совпадает с любой точкой оси вращения, ось Z обычно направляют по оси вращения. Движение тела задается уравнением $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$, а движение любой точки тела радиусом-вектором $\vec{r}_i = \vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$.

4.3. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Кинематическими характеристиками такого движения тела являются угол поворота, угловая скорость и угловое ускорение.

Угол поворота (угол собственного вращения) задается как функция времени и определяет положение тела в любой момент времени: $\varphi = \varphi(t)$ – уравнение вращательного движения тела.

Угловая скорость вращательного движения тела характеризует изменение положения тела (за единицу времени) и определяется первой производной по времени от угла поворота

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\,.$$

Обычно вводят вектор угловой скорости $\vec{\omega}$. Вектор угловой скорости всегда направлен по оси вращения так, что с конца его вращение тела наблюдается против часовой стрелки.

$$\vec{\omega} = \omega\vec{\omega}^0 = \dot{\varphi}\vec{\omega}^0 = \dot{\vec{\varphi}} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}\,.$$

Вектор углового ускорения характеризует изменение вектора угловой скорости (за единицу времени) и определяется первой производной по времени от вектора угловой скорости

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}}\,.$$

Для ускоренного вращения тела $\vec{\varepsilon}\uparrow\uparrow\vec{\omega}$, для замедленного $\vec{\varepsilon}\uparrow\downarrow\vec{\omega}$.

Для равнопеременного вращения тела вокруг неподвижной оси $\varepsilon = \text{const}$, $d\omega = \varepsilon dt$, откуда $\omega = \varepsilon t + \omega_0$, и уравнение вращения тела (надо проинтегрировать $d\varphi = \omega dt$)

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} + \omega_0 t + \varphi_0.$$

Для равномерного вращения тела $\omega = \text{const}$, уравнение вращения имеет вид $\varphi = \omega t + \varphi_0$ (уравнение вращательного движения).

4.4. ВЫРАЖЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТОЧЕК ТВЕРДОГО ТЕЛА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

При вращении тела вокруг неподвижной оси каждая точка M_i описывает окружность радиуса h_i в плоскости, перпендикулярной оси вращения (рис. 12). Движение тела задано углом поворота $\varphi = \varphi(t)$. Положение точки M_i задается радиусом-вектором $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$.

При повороте тела на бесконечно малый угол $d\varphi$ радиус-вектор i-ой точки изменяется на

$$d\vec{r}_i = ds_i\vec{\tau}_i = h_i d\varphi\vec{\tau}_i.$$

Вектор скорости i-ой точки равен

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = h_i\dot{\varphi}\vec{\tau}_i = \omega r_i \sin\alpha_i\vec{\tau}_i$$

и может быть представлен в виде вектора векторного произведения

$$\vec{v}_i = [\vec{\omega}\vec{r}_i]\,.$$

Эта формула называется формулой Леонарда Эйлера (1707—1783).

Чтобы получить выражение вектора ускорения i-ой точки тела, надо взять производную $\frac{d\vec{v}_i}{dt}$:

$$\vec{a}_i = \frac{d}{dt}[\vec{\omega}\vec{r}_i] = [\dot{\vec{\omega}}\vec{r}_i] + [\vec{\omega}\dot{\vec{r}}_i] = [\vec{\varepsilon}\vec{r}_i] + [\vec{\omega}\vec{v}_i] = \vec{a}_{i\tau} + \vec{a}_{in}\,.$$

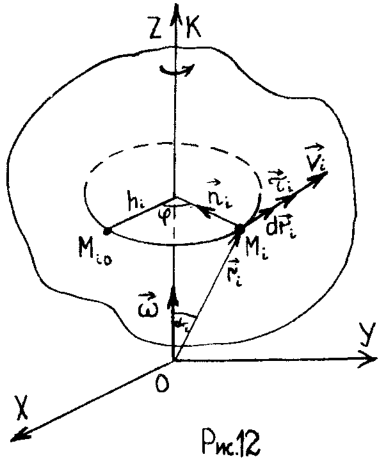


Рис.12

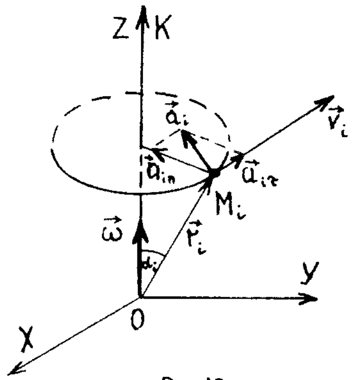


Рис.13

Касательное ускорение i-ой точки $a_{i\tau} = \varepsilon r_i \sin\alpha_i = \varepsilon h_i$, нормальное ускорение $a_{in} = \omega v_i \sin 90^\circ = \omega v_i = \omega^2 h_i$ (рис. 13). Индекс «i» обычно опускается.

4.5. ВЫРАЖЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТОЧЕК ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ ВРАЩЕНИИ ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ И В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА

При вращении тела вокруг неподвижной точки направление оси вращения все время меняется, $\vec\omega^0 = \vec\omega^0(t)$, $\vec\omega = \omega(t)\vec\omega^0(t) = \vec\omega(t)$. Формула Эйлера позволяет получить скорости точек тела в данный момент времени.

В общем случае движения свободного твердого тела мгновенные скорости и ускорения точек тела имеют вид:

$$\vec v_i = \vec v_{0'} + [\vec\omega \vec r_i'], \quad \vec a_i = \vec a_{0'} + \frac{d}{dt}[\vec\omega \vec r_i'].$$

4.6. ФОРМУЛЫ ПУАССОНА[1]

Скорость вращения любой точки, заданной радиусом-вектором $\vec r_i'$ (рис. 11), можно представить как

$$\vec v_i' = \frac{d\vec r_i'}{dt}$$

и формулу Эйлера записать в виде

$$\frac{d\vec r_i'}{dt} = [\vec\omega \vec r_i'].$$

Свяжем неизменно с вращающимся телом декартову систему координат K' с началом в точке O', единичными ортами $\vec i'$, $\vec j'$, $\vec k'$, которые вместе с телом вращаются вокруг той же оси с угловой скоростью $\vec\omega$. Тогда, используя формулу Эйлера, для единичных векторов можно записать

$$\frac{d\vec i'}{dt} = [\vec\omega \vec i'], \quad \frac{d\vec j'}{dt} = [\vec\omega \vec j'], \quad \frac{d\vec k'}{dt} = [\vec\omega \vec k'].$$

Это формулы Пуассона. Производная по времени от вращающегося с угловой скоростью $\vec\omega$ единичного вектора равна вектору векторного произведения вектора угловой скорости и единичного вектора.

[1] Пуассон Симеон Дени (1781—1840) — французский механик, физик, математик, член Парижской АН (1812) и Петербургской АН (1826).

§ 5. Кинематические характеристики относительного движения материальной точки (Кинематика сложного движения точки)

5.1. ЗАДАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПОДВИЖНОЙ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА И ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Пусть движение материальной точки M рассматривается относительно некоторой подвижной системы отсчета K', которая движется относительно неподвижной (условно неподвижной) инерциальной системы отчета K (рис. 14). В качестве систем координат будем использовать декартовы системы. Движение подвижной (штрихованной) системы K' в неподвижной системе K можно задать радиусом-вектором начала координат системы K' — точки O' (поступательное движение системы K') и вектором мгновенной угловой скорости относительно точки O' (вращательное движение системы K' относительно точки O')

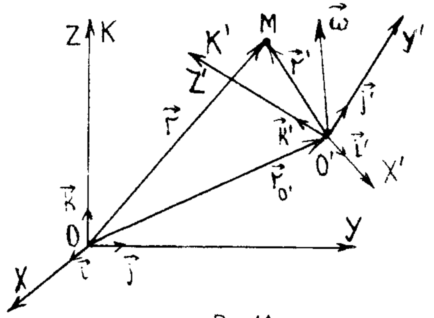


Рис.14

$$\vec r_{0'} = \vec r_{0'}(t),$$
$$\omega = \omega(t).$$

От двух векторных уравнений, задающих движение системы K', можно перейти к шести скалярным уравнениям:

$$x_{0'} = x_{0'}(t),$$
$$y_{0'} = y_{0'}(t),$$
$$z_{0'} = z_{0'}(t),$$

(это уравнения движения начала системы K', уравнения абсолютного поступательного движения системы K')

$$\omega_x = \omega_x(t),$$
$$\omega_y = \omega_y(t),$$
$$\omega_z = \omega_z(t),$$

(это проекции вектора угловой скорости системы K' на оси системы K).

Движение точки M можно рассматривать в системе K, задав его радиусом-вектором $\vec r = \vec r(t)$, или уравнениями движения

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z(t),$$

и в системе K', задав его радиусом-вектором $\vec r' = \vec r'(t)$, или координатами

$$x' = x'(t),\quad y' = y'(t),\quad z' = z'(t).$$

5.2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Движение точки M относительно системы K, ее вектор скорости и вектор ускорения принято называть *абсолютными*.

$\vec r = \vec r(t) = x\vec i + y\vec j + z\vec k$ — радиус-вектор абсолютного движения точки.

$\vec v_{абс} = \dot{\vec r} = \dot x\vec i + \dot y\vec j + \dot z\vec k$ — вектор абсолютной скорости точки.

$\vec a_{абс} = \dot{\vec v}_{абс} = \ddot x\vec i + \ddot y\vec j + \ddot z\vec k = \ddot{\vec r}$ — вектор абсолютного ускорения точки.

Движение точки M и все характеристики его относительно системы K' называются *относительными*.

$\vec r' = \vec r'(t) = x'\vec i' + y'\vec j' + z'\vec k'$ — радиус-вектор относительного движения точки.

$\vec v_{отн} = \dot x'\vec i' + \dot y'\vec j' + \dot z'\vec k'$ — вектор относительной скорости точки.

$\vec a_{отн} = \ddot x'\vec i' + \ddot y'\vec j' + \ddot z'\vec k'$ — вектор относительного ускорения точки.

Движение точки M относительно системы K, обусловленное (вызванное) движением подвижной системы K' относительно неподвижной системы K, называется переносным движением точки M.

Векторы переносной скорости и переносного ускорения точки можно получить, используя формулу Эйлера при условии, что не учитывается относительное движение точки в системе K', т. е. при условии, что координаты точки x', y', z' остаются как бы постоянными, а меняются только орты координатных осей K':

$$\vec i' = \vec i'(t),\quad \vec j' = \vec j'(t),\quad \vec k' = \vec k'(t).$$

$$\vec v_{пер} = \vec v_{0'} + [\vec\omega\vec r']_{r'=\mathrm{const}} = \vec v_{0'} + [\vec\omega(x'\vec i' + y'\vec j' + z'\vec k')]_{x',\,y',\,z'=\mathrm{const}},$$

$$\vec a_{пер} = \vec a_{0'} + \frac{d}{dt}[\vec\omega(x'\vec i' + y'\vec j' + z'\vec k')]_{x',\,y',\,z'=\mathrm{const}} = \vec a_{0'} + \frac{d}{dt}[\vec\omega\vec r']_{r'=\mathrm{const}}.$$

В качестве типичного примера сложного движения точки можно рассмотреть движение человека (материальная точка) на теплоходе (система K'), теплоход движется относительно берегов реки (система K). Движение человека относительно теплохода — относительное. Движение человека, обусловленное движением теплохода относительно берегов,— переносное движение человека относительно берегов, в системе K. Переносное и относительное движение человека определяют его абсолютное движение. Если человек сидит на теплоходе (относительное движение равно нулю), его абсолютное движение совпадает с переносным.

5.3. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ АБСОЛЮТНЫМ И ОТНОСИТЕЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ ТОЧКИ

Движение системы K' относительно системы K всегда считается известным (заданным). Тогда для точки M в любой момент времени между ее абсолютным и относительным радиусами-векторами имеет место соотношение $\vec r = \vec r_{0'} + \vec r'$ или в виде

$$\vec r = \vec r_{0'} + (x'\vec i' + y'\vec j' + z'\vec k'), \qquad (1)$$

где x', y', z', $\vec i'$, $\vec j'$, $\vec k'$ являются функциями времени, так как точка в общем случае движется относительно K', а система K' движется поступательно и вращается вокруг точки O'.

Для частного случая, когда система K' движется равномерно, прямолинейно и поступательно ($\vec v_{0'} = \mathrm{const}$, $\omega = 0$), т. е. является инерциальной системой отсчета, соотношение (1) дает преобразования Галилея.

5.4. ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ СКОРОСТЕЙ ТОЧКИ

Получим связь между векторами абсолютной и относительной скорости точки. Для этого продифференцируем по времени (1):

$$\dot{\vec r} = \dot{\vec r}_{0'} + (\dot x'\vec i' + \dot y'\vec j' + \dot z'\vec k') + (x'\dot{\vec i}' + y'\dot{\vec j}' + z'\dot{\vec k}'). \qquad (2)$$

Используя формулы Пуассона, преобразуем последнее слагаемое в правой части (2)

$$x'[\vec\omega\vec i'] + y'[\vec\omega\vec j'] + z'[\vec\omega\vec k'] = [\vec\omega(x'\vec i')] + [\vec\omega(y'\vec j')] + [\vec\omega(z'\vec k')] = [\vec\omega(x'\vec i' + y'\vec j' + z'\vec k')] = [\vec\omega\vec r']_{r'=\mathrm{const}}$$

и перепишем (2) в виде

$$\vec v_{абс} = \vec v_{0'} + [\vec\omega\vec r']_{r'=\mathrm{const}} + (\dot x'\vec i' + \dot y'\vec j' + \dot z'\vec k')_{\vec i',\,\vec j',\,\vec k'=\mathrm{const}}$$

или

$$\vec{v}_{абс} = \vec{v}_{пер} + \vec{v}_{отн}.$$

Абсолютная скорость точки равна векторной сумме переносной и относительной ее скоростей.

5.5. ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ УСКОРЕНИЙ ТОЧКИ

Получим связь между векторами абсолютного и относительного ускорения точки. Для этого продифференцируем по времени соотношение (2), которое запишем в виде:

$$\vec{v}_{абс} = \vec{v}_{0'} + (\dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}') + [\vec{\omega}(x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}')].$$

$$\vec{a}_{абс} = \vec{a}_{0'} + (\ddot{x}'\vec{i}' + \ddot{y}'\vec{j}' + \ddot{z}'\vec{k}') + (\dot{x}'\dot{\vec{i}}' + \dot{y}'\dot{\vec{j}}' + \dot{z}'\dot{\vec{k}}') + \left[\left(\frac{d}{dt}\vec{\omega}\right)(x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}')\right] + \left[\vec{\omega}(\dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}')\right] + \left[\vec{\omega}(x'\dot{\vec{i}}' + y'\dot{\vec{j}}' + z'\dot{\vec{k}}')\right].$$

В этом выражении

$$\ddot{x}'\vec{i}' + \ddot{y}'\vec{j}' + \ddot{z}'\vec{k}' = \vec{a}_{отн};$$

$$\vec{a}_{0'} + \left[\left(\frac{d}{dt}\vec{\omega}\right)(x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}')\right] + [\vec{\omega}(x'\dot{\vec{i}}' + y'\dot{\vec{j}}' + z'\dot{\vec{k}}')] =$$

$$= \vec{a}_{0'} + \left[\left(\frac{d}{dt}\vec{\omega}\right)\vec{r}'\right]_{r'=\mathrm{const}} + \left[\vec{\omega}\,\frac{d}{dt}(x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}')\right]_{x',y',z'=\mathrm{const}} =$$

$$= \dot{\vec{a}}_{0'} + \left[\left(\frac{d}{dt}\vec{\omega}\right)\vec{r}'\right]_{r'=\mathrm{const}} + \left[\vec{\omega}\,\frac{d\vec{r}'}{dt}\right]_{r'=\mathrm{const}} =$$

$$= \vec{a}_{0'} + \frac{d}{dt}\,[\vec{\omega}\vec{r}']_{r'=\mathrm{const}} = \vec{a}_{пер};$$

$$\dot{x}'\dot{\vec{i}}' + \dot{y}'\dot{\vec{j}}' + \dot{z}'\dot{\vec{k}}' = \dot{x}'[\vec{\omega}\vec{i}'] + \dot{y}'[\vec{\omega}\vec{j}'] + \dot{z}'[\vec{\omega}\vec{k}'] = [\vec{\omega}(\dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}')] = [\vec{\omega}\vec{v}_{отн}].$$

Таких членов в выражении $\vec{a}_{абс}$ два, они представляют ускорение, которое называется ускорением Кориолиса[1]

$$\vec{a}_{кор} = 2[\vec{\omega}\vec{v}_{отн}],$$

а соотношение между абсолютным и относительным ускорениями точки называется теоремой о сложении ускорений, или теоремой Кориолиса:

$$\vec{a}_{абс} = \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{отн} + \vec{a}_{кор}.$$

[1] Кориолис Гюстав Гаспар (1792–1843) – французский физик, член Парижской АН (1836).

III. ОСНОВЫ МЕХАНИКИ НЬЮТОНА

§ 6. Законы Ньютона

Основной труд великого английского ученого Исаака Ньютона (1643—1727) «Математические начала натуральной философии», или «Начала», был завершен в 1686 году, опубликован в 1687 году (и еще при жизни автора два раза на латинском языке в 1713 и в 1725 году и впервые на английском языке в 1727 году, все с предисловием самого Ньютона). Перевод книги на русский язык осуществил А. Н. Крылов (1863—1945), [Собрание трудов, т. VII, М.— Л., 1936].

Научная деятельность Ньютона 56 лет (с 1671 года) была связана с Королевским обществом, с 1703 года он его президент (до смерти). Вклад Ньютона в науку огромен, но наибольший вклад сделан им в механику.

6.1. СИЛА И МАССА

Для описания явлений природы Ньютон ввел несколько основных понятий: *пространство (абсолютное и относительное), время (абсолютное и относительное), движение (для количественной характеристики движения тел он ввел величину «количество движения», определяемую произведением массы тела на скорость $m\vec{v}$; сейчас эту величину называем импульсом тела), силу и массу.*

Сила и масса до сих пор не имеют четких определений, хотя широко используются и в науке, и в практике (в том числе в быту), поэтому укажем здесь лишь их характерные особенности.

В кинетике рассматривается движение и равновесие тел с учетом взаимодействия между ними. Механическое взаимодействие между телами может вызывать их движение или изменить его или привести к возникновению деформации тел. Если некоторое тело вызывает деформацию другого тела или изменяет его движение, или приводит его в движение, то говорят, что первое тело действует на второе тело с некоторой силой. Сила является причиной изменения механического состояния тел.

Сила — это мера механического взаимодействия тел. Как физическая величина сила характеризует и численное значение и направление взаимодействия. Действие силы в общем случае зависит от точки приложения.

Взаимодействие между телами может осуществляться непосредственным контактом (сила соприкосновения) и через посредство материальной среды — поля (силы дальнодействия, например, гравитационная сила). В классической механике не изучается природа сил и не рассматривается механизм передачи взаимодействий, принимается, что взаимодействие передается мгновенно.

Сила в общем случае может зависеть от времени, положения материальной точки, ее скорости:

$$\vec{F} = \vec{F}\,(t,\ \vec{r},\ \dot{\vec{r}}).$$

Так, гравитационная сила, действующая на материальную точку массы m со стороны точки с массой m_0, является функцией положения точки, например, радиуса-вектора,

$$\vec{F}_{\text{гр}} = \vec{F}\,(\vec{r}) = -\frac{Gm_0m}{r^3}\vec{r};$$

сила сопротивления может быть функцией скорости точки $\vec{F} = -k\vec{v}$ и т. д.

С определением понятия массы дело обстоит еще более неопределенно. В зависимости от закона, в выражение которого входит эта величина, массу одного и того же тела называют инертной массой, или гравитационной, или массой покоя (полной массой). Инертная масса входит в выражение второго закона Ньютона и является мерой инертных свойств тела. Гравитационная масса входит в выражение закона всемирного тяготения и служит мерой гравитационных свойств тела. Масса, входящая в выражение закона Эйнштейна, служит мерой энергоемкости тела[1].

Попытки найти разницу между гравитационной и инертной массой приводят к выводу об их эквивалентности (точность современных измерений дает

$$\frac{m_{\text{ин}} - m_{\text{гр}}}{m_{\text{ин}}} \leqslant 10^{-12}), \text{ т. е. } m_{\text{ин}} = m_{\text{гр}}.$$

[1] Сам Ньютон определил массу следующим образом. Количество материи (масса) есть мера таковой, устанавливаемая пропорционально плотности и объему ее.

6.2. ПЕРВЫЙ ЗАКОН НЬЮТОНА — ЗАКОН ИНЕРЦИИ

Все законы Ньютона справедливы для материальных точек. Первый закон:

Всякая материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока и поскольку она не понуждается приложенными силами изменить это состояние.

Этот закон имеет глубокое мировоззренческое содержание. Прежде всего он утверждает, что движение не может возникнуть без взаимодействия, движение может быть лишь передано. Используя понятие импульса материальной точки, закон можно записать математически в виде $m\vec{v} = \text{const}$, откуда видно, что движение (количество движения, или импульс) точки сохраняется, если на нее не действуют силы.

Но самое главное значение закона состоит в том, что он утверждает, что существуют такие системы отсчета, относительно которых движение точки происходит равномерно и прямолинейно, если на точку не действуют никакие силы (не действуют другие тела). Системы отсчета, в которых выполняется первый закон Ньютона, называются инерциальными системами отсчета. Первый закон Ньютона определяет инерциальную систему отсчета. У Ньютона такая система отсчета является абсолютно неподвижной, она связана с абсолютным пространством.

Равномерное и прямолинейное движение называют часто движением по инерции, поэтому первый закон Ньютона называется законом инерции.

Так как на Земле нет движений по инерции, т. е. равномерных и прямолинейных без действия сил, то в качестве инерциальной системы отсчета используется некоторая гипотетическая неподвижная система отсчета, которая в настоящее время реализуется через совокупность определенного числа неподвижных звезд (ведется работа по построению «неподвижной» инерциальной системы отсчета на базе далеких галактик).

Эксперименты позволяют определить отклонение системы отсчета от инерциальной, но не позволяют установить, существует ли хотя бы одна строго инерциальная система отсчета.

6.3. ВТОРОЙ ЗАКОН НЬЮТОНА — ОСНОВНОЙ ЗАКОН МЕХАНИКИ

Второй закон Ньютона устанавливает количественную связь между силой, действующей на материальную точку, и вызываемым этой силой изменением движения точки. Он отвечает на вопрос, как движется материальная точка в инерциальной системе отчета, если на точку действуют силы: **Изменение импульса материальной точки за единицу времени пропорционально приложенной силе и происходит в направлении действия этой силы**

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = k\vec{F}.$$

В этом законе коэффициент k определяется выбором единиц измерения. Так как второй закон служит определяющим уравнением для единицы массы или силы, то $k = 1$, и тогда второй закон принимает вид

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}.$$

Для точки с постоянной массой

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a},$$

и закон можно представить в виде

$$m\vec{a} = \vec{F}:$$

В любой момент времени для движущейся в инерциальной системе отчета материальной точки произведение массы этой точки на ее вектор ускорения численно равно вектору силы, действующей на точку.

Второй закон Ньютона имеет универсальный характер: он справедлив для материальной точки в любой инерциальной системе отсчета и в любой момент времени.

Он является основным законом механики, так как объединяет кинематику (через ускорение) и динамику (через массу и силу), он позволяет описать любое движение материальной точки в дифференциальных уравнениях (позволяет решать основную задачу механики).

6.4. ТРЕТИЙ ЗАКОН НЬЮТОНА — ЗАКОН РАВЕНСТВА ДЕЙСТВИЯ И ПРОТИВОДЕЙСТВИЯ

Действию всегда есть равное и противоположное по направлению противодействие.

Другими словами, две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными, но противоположно направленными (рис. 15). Сила $\vec{F}_1$ — это сила, с которой точка m_2 действует на точку m_1 (в данном случае притягивает ее), а $\vec{F}_2$ — сила, с которой точка m_1 действует на точку m_2. Закон можно записать в виде $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$.

Следует обратить внимание на то, что эти силы не уравновешиваются. Они приложены к разным точкам и не могут вызвать движения этих точек в одном направлении.

Рис.15

Третий закон Ньютона действителен уже для двух материальных точек, поэтому он позволяет перейти к механике системы материальных точек. Закон справедлив в любой системе отсчета, так как не содержит кинематических элементов.

6.5. ПРИНЦИП НЕЗАВИСИМОСТИ ДЕЙСТВИЯ СИЛ

В классической механике принимается, что если на точку действует несколько сил, то вектор ускорения, с которым она движется, равен векторной сумме ускорений, сообщаемых ей в соответствии со вторым законом Ньютона каждой отдельной силой $\vec{F}_i$:

$$\vec{a} = \sum\vec{a}_i, \quad \vec{a}_i = \frac{\vec{F}_i}{m}.$$

Другими словами, считается, что действие силы не зависит от действия других сил.

§ 7. Основная задача механики

Основная задача механики (ОЗМ) состоит в нахождении положения движущейся точки (или каждой точки движущейся системы точек) в любой момент времени, если известны силы, действующие на точку (точки системы точек), которые вызывают рассматриваемое движение.

7.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Так так далее мы везде будем рассматривать движение материальной точки в инерциальной системе отсчета (условно неподвижной), то для движущейся точки в любой момент времени справедлив второй закон Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

Если ввести радиус-вектор точки, то получим дифференциальное уравнение движения точки в векторной форме

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}.$$

Проекции этого уравнения на координатные оси представляют собой дифференциальные уравнения движения точки в скалярной форме. В декартовых координатах они имеют вид:

$$m\ddot{x} = F_x,$$
$$m\ddot{y} = F_y,$$
$$m\ddot{z} = F_z,$$

где F_x, F_y, F_z — проекции силы, действующей на точку, на оси X, Y, Z;

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}\ .$$

Чтобы получить дифференциальные уравнения движения точки при естественном способе задания движения, надо записать второй закон Ньютона через проекции на касательную и главную нормаль:

$$m\ddot{s} = F_\tau\ ,$$
$$m\frac{\dot{s}^2}{\varrho} = F_n\ ;$$

F_τ и F_n — проекции силы на касательную и главную нормаль;

$$\vec{F} = F_\tau\vec{\tau} + F_n\vec{n}\ .$$

Если движение точки происходит в некоторой плоскости, удобно использовать полярные координаты. В этом случае берутся проекции второго закона Ньютона на направление радиуса-вектора точки и на направление, перпендикулярное радиусу-вектору (поперечное):

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r\ ,$$
$$m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = F_p\ ,$$

где $\vec{F} = F_r\vec{r}^{\,0} + F_p\vec{p}^{\,0}$.

7.2. ПЕРВАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИКИ — ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛЫ ПО ЗАДАННОМУ ДВИЖЕНИЮ

Второй закон Ньютона позволяет выделить два типа задач на движение. Первая задача состоит в определении силы, под действием которой происходит движение, по заданному движению. Например, движение точки с известной массой задано уравнениями: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Тогда проекции вектора силы на координатные оси в любой момент времени равны:

$$F_x = m\ddot{x},\quad F_y = m\ddot{y},\quad F_z = m\ddot{z}.$$

Значение (модуль) вектора силы определяется по теореме Пифагора

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2\ ,\quad F = m\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}\ ,$$

а направление дается косинусами:

$$\cos(\vec{X}\,\widehat{\ }\,\vec{F}) = \frac{F_x}{F} = \frac{\ddot{x}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}\ ,$$
$$\cos(\vec{Y}\,\widehat{\ }\,\vec{F}) = \frac{F_y}{F} = \frac{\ddot{y}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}\ ,$$
$$\cos(\vec{Z}\,\widehat{\ }\,\vec{F}) = \frac{F_z}{F} = \frac{\ddot{z}}{\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}}$$

(из определения ортогональной проекции вектора на ось).

7.3. ВТОРАЯ ЗАДАЧА ДИНАМИКИ — ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПО ЗАДАННЫМ СИЛАМ (ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА МЕХАНИКИ)

Эта задача состоит в нахождении движения точки (или системы точек) известной массы под действием заданных сил, вызывающих это движение. Она решается интегрированием дифференциальных уравнений движения.

Пусть точка массы m движется под действием известной силы $\vec{F}$. Это значит, что вектор силы является известной функцией времени, положения точки, ее скорости, например, в декартовых координатах:

$$\vec{F} = \vec{F}(t,\ \vec{r},\ \vec{v}) = \vec{F}(t,\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z})\ ,$$

т. е. в любой момент времени известны и значение и направление вектора силы.

Для произвольного момента времени нужно записать второй закон Ньютона для движущейся точки

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(t,\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z})$$

и получить дифференциальные уравнения движения точки:

$$m\ddot{x} = F_x(t,\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z})\ ,$$
$$m\ddot{y} = F_y(t,\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}\ ,$$
$$m\ddot{z} = F_z(t,\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z})\ .$$

Совместное интегрирование этих дифференциальных уравнений второго порядка может привести к общему решению в виде координат точки как функций времени и шести постоянных интегрирования:

$$x = x(t,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6)\,,$$
$$y = y(t,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6)\,,$$
$$z = z(t,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6)\,.$$

Постоянные интегрирования определяются по начальным условиям движения точки.

Если основная задача механики связана с движением системы точек, то дифференциальных уравнений получается $3n$:

$$m_i\ddot{x}_i = F_{ix}\,,$$
$$m_i\ddot{y}_i = F_{iy}\,,$$
$$m_i\ddot{z}_i = F_{iz}\,,$$

Их общее решение может быть представлено $3n$ координатами всех точек системы в виде функций времени и $6n$ постоянных интегрирования:

$$x_i = x_i(t,\ C_1 - C_{6n})\,,$$
$$y_i = y_i(t,\ C_1 - C_{6n})\,,$$
$$z_i = z_i(t,\ C_1 - C_{6n})\,,$$

$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$

7.4. НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Для определения постоянных интегрирования, которые появляются при решении дифференциальных уравнений движения, должны быть известны начальные условия движения точки (системы точек). Для некоторого начального момента времени, обычно принимаемого за нуль, $t_0 = 0$, задаются начальные координаты и проекции начальной скорости всех точек на координатные оси. Для одной точки в общем случае начальных условий должно быть шесть: например, в декартовых координатах это координаты точки x_0, y_0, z_0 и проекции скорости $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$. Для системы n точек в качестве начальных условий должно быть известно $3n$ координат и $3n$ проекций векторов скорости.

Систему координат следует выбирать так, если возможно, чтобы большая часть координат в начальный момент равнялась нулю. В случае одной точки начало координат можно совместить с начальным положением точки.

Если известны массы всех точек и действующие на них силы, а также заданы начальные условия движения, то механическое поведение системы определяется однозначно.

7.5. ПРИНЦИП ПРИЧИННОСТИ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ (ПРИНЦИП ПРИЧИННОСТИ ЛАПЛАСА[1])

В первой половине XIX века сложилось представление о всеобщности законов механики. Поведение системы точек, если известны массы, силы, начальные условия, заранее определено. Значит, в мире все механически обусловлено, все можно предвидеть. Трудность заключается в большом числе начальных условий. В этом состоит принцип причинности классической механики (механический детерминизм), его часто называют лапласовым детерминизмом.

Механистическое понимание учения о причинности ведет к фатализму. Диалектический материализм, признавая объективный и всеобщий характер причинности, отвергает упрощенный взгляд на нее. Причинные связи в реальном мире имеют многообразный характер и не сводятся только к механическим причинам.

Развитие науки отвергло лапласовский детерминизм.

7.6. ОБЩИЙ ПУТЬ РЕШЕНИЯ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ

При решении основной задачи механики полезно придерживаться следующих положений.

1. Выбрать рационально систему координат (способ задания движения) и записать начальные условия движения точки (системы точек).
2. Для произвольного момента времени отметить все силы, действующие на движущуюся точку (точки).
3. Для произвольного момента времени записать для точки (всех точек системы) второй закон Ньютона и составить дифференциальные уравнения движения точки (всех точек системы).
4. Проинтегрировать совместно дифференциальные уравнения, определяя постоянные интегрирования по начальным условиям, и получить уравнения движения точки (всех точек) при выбранном способе задания движения.

[1] Лаплас Пьер Симон (1749—1827) — французский астроном, физик и математик. Член Парижской АН (1785), член Петербургской АН (1802).

§ 8. Примеры решения основной задачи механики для прямолинейного движения материальной точки

8.1. УСЛОВИЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОСТИ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Если на точку действует некоторая сила, то для того, чтобы движение точки было прямолинейным, необходимо и достаточно, чтобы направление силы было постоянным и чтобы сила была сонаправлена с вектором начальной скорости точки:

$$\vec{F}\uparrow\uparrow\vec{v}_0 \text{ или } \vec{F}\uparrow\downarrow\vec{v}_0.$$

8.2. СЛУЧАЙ ПОСТОЯННОЙ СИЛЫ

Определить, как будет двигаться точка массы m под действием постоянной по величине и направлению силы, $\vec{F} = \text{const}$, если в начальный момент точка покоилась.

Так как направление силы постоянно, то достаточно одной координатной оси X, которую удобно направить по линии действия силы, а начало координат разумно совместить с начальным положением точки M_0 (рис. 16). Тогда начальные условия: $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$. Отмечаем для произвольного момента времени положение точки M и действующую на нее силу. Записываем второй закон Ньютона для этого момента $m\vec{a} = \vec{F}$, получаем дифференциальное уравнение движения точки $m\ddot{x} = F$, так как $\vec{a} = \ddot{x}\vec{i}$.

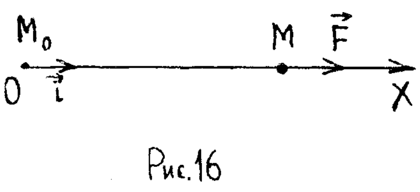


Рис. 16

В механике чаще всего дифференциальные уравнения интегрируют методом разделения переменных, поэтому массу точки удобно переносить в правую часть. Имеем

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{F}{m},$$

разделяем переменные

$$d\dot{x} = \frac{F}{m}\,dt.$$

Можно интегрировать, получаем первый интеграл

$$\dot{x} = \frac{F}{m}t + C_1.$$

Определяем постоянную C_1 по начальным условиям: когда $t = t_0 = 0$, $\dot{x} = \dot{x}_0 = 0$, $C_1 = 0$.

Первый интеграл принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F}{m}t,$$

разделяем переменные

$$dx = \frac{F}{m}t\,dt$$

и интегрируем

$$x = \frac{F}{m}\,\frac{t^2}{2} + C_2.$$

Определяем C_2: когда $t = t_0 = 0$, $x = 0$ и $C_2 = 0$. Уравнение движения точки

$$x = \frac{F}{m}\,\frac{t^2}{2}.$$

Под действием постоянной силы точка движется по прямой с постоянным ускорением.

8.3. СЛУЧАЙ СИЛЫ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Если $F = F(\vec{v}) = F(\dot{x})$, то в дифференциальном уравнении $m\ddot{x} = F(\dot{x})$ можно разделить переменные

$$\frac{d\dot{x}}{F(\dot{x})} = \frac{1}{m}dt$$

и проинтегрировать (если не будет математических сложностей из-за вида функции $F(\dot{x})$).

8.4. СЛУЧАЙ СИЛЫ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ПОЛОЖЕНИЯ ТОЧКИ

Если $F = F(x)$, то применяют следующий прием:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\,\frac{dx}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\dot{x},$$

и в дифференциальном уравнении $m\ddot{x} = F(x)$ после замены $\ddot{x}$ можно разделить переменные и интегрировать

$$\dot{x}\,d\dot{x} = \frac{1}{m}F(x)\,dx,$$

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{1}{m}\int F(x)\,dx + C_1 .$$

Примером такого движения является прямолинейное движение точки под действием возвращающей силы. Возвращающей силой называется сила, пропорциональная смещению точки от положения равновесия и направленная к этому положению равновесия. Типичный пример — шарик массы m, подвешенный на пружинке и выведенный из положения равновесия O (рис. 17). Массой пружины пренебрегаем. На шарик действует упругая сила пружины (поэтому возвращающую силу часто называют квазиупругой) $\vec{F} = -k\vec{r}$. Начальные условия: $t = t_0 = 0$, $x_0 = OM_0 = A$, $\dot{x} = O$. В произвольный момент времени шарик занимает положение M, определяемое радиусом-вектором $\vec{r} = OM = x\vec{i}$. Записываем второй закон Ньютона $m\vec{a} = -k\vec{r}$. Дифференциальное уравнение движения $m\ddot{x} = -kx$ принимает вид

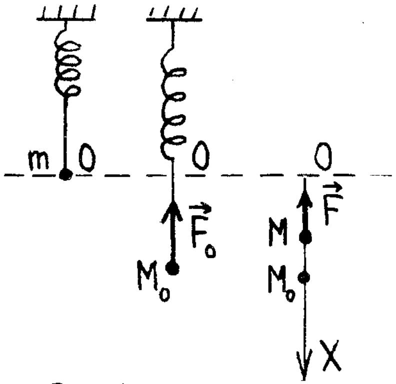


Рис.17

$$\dot{x}\,d\dot{x} = -\frac{k}{m}x\,dx .$$

Интегрируем

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = -\frac{k}{m}\,\frac{x^2}{2} + C_1 .$$

Используя начальные условия, имеем

$$C_1 = \frac{k}{m}\,\frac{A^2}{2}, \quad \dot{x}^2 = \frac{k}{m}(A^2 - x^2) .$$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)}\,, \quad \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\,dt .$$

Можно интегрировать

$$\arcsin\frac{x}{A} = \sqrt{\frac{k}{m}}\,t + C_2, \quad C_2 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2},$$

$$x = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \frac{\pi}{2}\right) = A\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t .$$

§ 9. Решение основной задачи механики для криволинейного движения точки под действием постоянной силы

Чтобы движение точки не было прямолинейным, когда на нее действует постоянная вила, $\vec{F} = \text{const}$, вектор начальной скорости точки не должен быть сонаправлен с нею.

Примером движения точки под действием постоянной во все время движения силы является движение точки в однородном поле силы тяжести, где на нее действует сила $\vec{F} = m\vec{g}$. Реализация криволинейного движения в этом случае — движение тела, брошенного со скоростью $\vec{v}_0$ под углом $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ к горизонту. Рассмотрим это движение.

Такое движение происходит в вертикальной плоскости, которую удобно принять за координатную плоскость XY, начало координат совместим с начальным положением точки M_0 (рис. 18). Начальные условия движения: $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $\dot{x}_0 = v_0\cos\alpha$, $\dot{y}_0 = v_0\sin\alpha$. Для произвольного положения точки M отмечаем силу, действующую на нее. Записываем второй закон Ньютона. $m\vec{a} = m\vec{g}$ и, беря проекции на оси X и Y, получаем дифференциальные уравнения движения точки

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0, \\ m\ddot{y} = -mg, \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{x} = 0, \\ \ddot{y} = -g. \end{cases}$$

Эти уравнения интегрируются независимо друг от друга до конца.

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = 0, \quad \frac{d\dot{y}}{dt} = -g, \qquad \begin{cases} d\dot{x} = 0, \\ d\dot{y} = -g\,dt, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = C_1, \\ \dot{y} = -gt + C_2. \end{cases}$$

Определяем постоянные интегрирования: при $t = t_0 = 0$

$$C_1 = \dot{x}_0 = v_0\cos\alpha, \quad C_2 = \dot{y}_0 = v_0\sin\alpha .$$

Первые интегралы представляют собой проекции вектора скорости точки на оси X и Y:

$$\dot{x} = v_0\cos\alpha, \quad \dot{y} = v_0\sin\alpha - gt .$$

Еще раз разделяем переменные и интегрируем, получаем вторые интегралы движения:

$$\begin{cases} dx = v_0\cos\alpha\cdot dt, \\ dy = v_0\sin\alpha\cdot dt - gt\cdot dt, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = v_0\cos\alpha\cdot t + C_3, \\ y = v_0\sin\alpha\cdot t - \frac{gt^2}{2} + C_4. \end{cases}$$

Находим постоянные интегрирования: $C_3 = 0$, $C_4 = 0$.

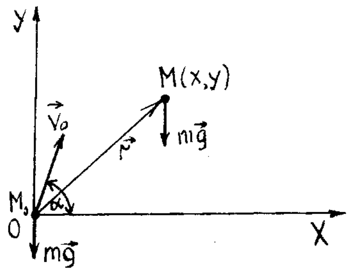


Рис.18

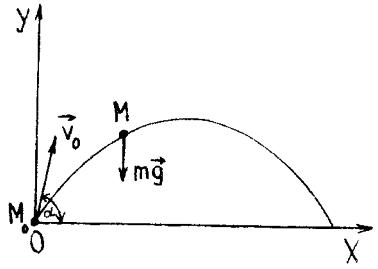


Рис.19

Уравнения движения точки:

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t,$$
$$y = v \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} -$$

определяют равномерное движение вдоль оси X и равнопеременное движение вдоль оси Y (по горизонтали и по вертикали соответственно).

Исключив из этих уравнений время, получим уравнение траектории:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 -$$

это парабола (рис. 19). Чтобы найти высоту подъема точки $H = y_1$, соответствующую некоторому моменту времени, надо определить этот момент времени t_1 из условия $\dot{y}_1 = 0$ (после этого момента времени точка опускается):

$$v_0 \sin \alpha - gt_1 = 0, \quad t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

и, подставив его в выражение $y = y(t)$, получим высоту подъема точки

$$H = y_1 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Аналогично находится расстояние по горизонтали (дальность полета). В момент падения t_2 координата $y_2 = 0$, т. е.

$$v_0 \sin \alpha \cdot t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = 0,$$

откуда $t_2 = 0$ (начало движения) и

$$t_2 = \frac{2\, v_0 \sin \alpha}{g}$$

(время падения).

Подставляем t_2 в выражение $x = x(t)$:

$$x_2 = v_0 \cos \alpha \cdot t_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

§ 10. Решение основной задачи механики для криволинейного движения точки под действием центральной силы

10.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИЛЫ

Центральной силой называется такая сила, линия действия которой все время проходит через некоторую точку пространства — центр силы (центр поля силы). При изучении движения точки под действием центральной силы его удобно рассматривать относительно центра силы (совмещать с ним тело отсчета и начало системы координат; рис. 20, а). Примером центральной силы притяжения является гравитационная сила, действующая на движущуюся точку массы m со стороны неподвижной точки массы m_0, находящейся в центре силы (рис. 20)

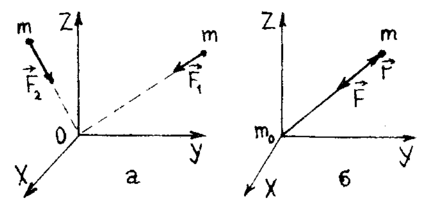


Рис.20

$$\vec{F}_{\text{гр}} = -\frac{Gm_0 m}{r^3} \vec{r},$$

или кулоновская сила между разноименно заряженными материальными точками, первая из которых находится в центре силы (поля) и имеет, например, положительный заряд $+e_0$, а вторая с отрицательным зарядом $-e$, движется относительно первой (электрон в атоме). Если обе точки имеют одноименные заряды, то сила будет силой отталкивания.

$$\vec{F}_{\text{кул}} = \mp \frac{ke_0 e}{r_3} \vec{r}$$

(«—» для силы притяжения, «+» для силы отталкивания; коэффициент k зависит от выбора единиц).

10.2. ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИЛЫ ВСЕГДА ПЛОСКОЕ

Начальные условия для точки, движущейся под действием центральной силы, в векторной форме представляют собой начальный радиус-вектор точки $\vec r_0$ и вектор начальной скорости $\vec v_0$, которые лежат в некоторой плоскости. Так как центральная сила всегда направлена по радиусу-вектору точки, то она не может вывести точку в другую плоскость, т. е. движение точки в центральном поле всегда происходит в плоскости $\vec r_0 \vec v_0$, которую можно считать плоскостью XY. Однако для описания плоского движения точки более удобно использовать полярные координаты (рис. 21). Решение основной задачи механики сводится в этом случае к получению двух уравнений движения точки $r = r(t, C_1 - C_4)$, $\varphi = \varphi(t, C_1 - C_4)$ $(z = 0!)$. Для определения четырех постоянных интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 начальные условия должны быть заданы в виде r_0, φ_0, $\dot r_0$, $\dot\varphi_0$ (надо знать $\vec r_0$ и $\vec v_0$).

10.3. КАК ДВИЖЕТСЯ ТОЧКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИЛЫ

Центральную силу можно представить в виде

$$\vec F = F_r \frac{\vec r}{r},$$

где F_r — проекция силы на направление радиуса-вектора точки. Для силы отталкивания $F_r = F$, для силы притяжения $F_r = -F$.

Дифференциальные уравнения движения точки в полярных координатах (§ 7.1)

$$m(\ddot r - r\dot\varphi^2) = F_r,$$
$$m(2\dot r\dot\varphi + r\ddot\varphi) = 0.$$

Второе уравнение легко интегрируется методом разделения переменных

$$2\frac{\dot r}{r} = -\frac{\ddot\varphi}{\dot\varphi}, \quad 2\frac{dr}{r} = -\frac{d\dot\varphi}{\dot\varphi},$$
$$2\ln r = -\ln\dot\varphi + C_1.$$

Постоянную интегрирования удобно представить в виде $C_1 = \ln C$, тогда

$$ln(r^2\dot\varphi) = \ln C \text{ и } r^2\dot\varphi = C.$$

Этот интеграл называется интегралом площадей, постоянная C — постоянной площадей, так как она численно равна удвоен-

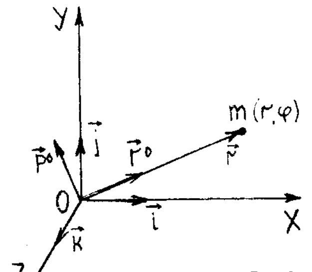


Рис.21

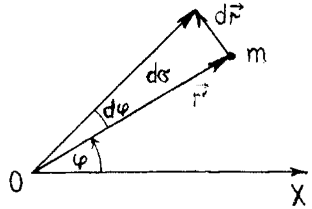


Рис.22

ной площади, описанной радиусом-вектором движущейся точки за единицу времени (рис. 22). В самом деле, за промежуток времени dt радиус-вектор r повернется на угол $d\varphi$ и опишет площадь треугольника

$$d\sigma = \frac{1}{2} r dr = \frac{1}{2} r(r d\varphi) = \frac{1}{2} r^2 d\varphi.$$

За единицу времени площадь, описанная радиусом-вектором точки, равна

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2} r^2\dot\varphi,$$

откуда

$$C = 2\frac{d\sigma}{dt}.$$

Величина $\frac{d\sigma}{dt}$ называется секторной скоростью движущейся точки. Под действием любой центральной силы точка движется с постоянной секторной скоростью.

Выражение $C = 2\frac{d\sigma}{dt}$ можно проинтегрировать:

$$d\sigma = \frac{C}{2} dt, \quad \sigma = \frac{C}{2} t + \sigma_0.$$

Под действием центральной силы точка движется так, что ее радиус-вектор описывает площади, пропорциональные времени. Это утверждение называется вторым законом Кеплера, так как впервые было получено австрийским астрономом Иоганном Кеплером (1571—1630) для планет.

10.4. ТРАЕКТОРИЯ ТОЧКИ, ДВИЖУЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИЛЫ

Так как мы выяснили, как движется точка, то для полного описания движения точки нужно найти ее траекторию (естественный способ задания движения, § 2.2).

Траектория в полярных координатах выражается функцией $r = r(\varphi)$. С помощью замены

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$$

и, имея на основе интеграла площадей

$$\frac{d\varphi}{dt} = \dot\varphi = \frac{C}{r^2}\,.$$

в дифференциальном уравнении

$$\ddot r - r\dot\varphi^2 = \frac{F_r}{m}$$

можно исключить время и получить уравнение траектории точки в дифференциальной форме в виде[1]

$$-m\frac{C^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right] = F_r.$$

Это уравнение называется формулой Бинэ.

Чтобы получить траекторию точки в явном виде $r = r(\varphi)$, нужно формулу Бинэ проинтегрировать, это можно сделать, в частности, для силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния точки от центра.

10.5. ТРАЕКТОРИЯ ТОЧКИ ДЛЯ СЛУЧАЯ СИЛЫ $F \sim \frac{1}{r^2}$

Такую зависимость имеют гравитационная и кулоновская силы. Запишем проекции этих сил (10.1) на направление радиуса-вектора точки следующим образом.

---

[1] $$\ddot r - r\dot\varphi^2 = \frac{d\dot r}{dt} - r\frac{C^2}{r^4} = \frac{d\dot r}{d\varphi}\frac{C}{r^2} - \frac{C^2}{r^3} = \frac{C}{r^2}\left[\frac{d\dot r}{d\varphi} - \frac{C}{r}\right] =$$
$$= \frac{C}{r^2}\left[\frac{d}{d\varphi}\frac{dr}{dt} - \frac{C}{r}\right] = \frac{C}{r^2}\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dr}{d\varphi}\frac{C}{r^2}\right) - \frac{C}{r}\right] = \frac{C^2}{r^2}\left\{\frac{d}{d\varphi}\left[\frac{d}{d\varphi}\left(-\frac{1}{r}\right)\right] - \frac{1}{r}\right\} =$$
$$= -\frac{C^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right].$$

Для гравитационной силы

$$F_r = -\frac{Gm_0m}{r^2} = -\frac{\mu m}{r^2}\,,$$

где $\mu = Gm_0$, $\mu > 0$.

Для кулоновской силы притяжения (предварительно умножим и разделим правую часть на массу движущейся точки, обладающей зарядом e)

$$F_r = -\frac{ke_0em}{mr^2} = -\frac{\mu m}{r^2}\,,$$

где $\mu = \frac{ke_0e}{m}$, $\mu > 0$.

Для кулоновской силы отталкивания

$$F_r = \frac{ke_0em}{mr^2} = -\frac{-ke_0em}{mr^2} = -\frac{\mu m}{r^2}\,,$$

где $\mu = -\frac{ke_0e}{m}$, $\mu < 0$.

Таким образом, мы представили проекции трех разных сил в одном виде

$$F_r = -\frac{\mu m}{r^2}\,.$$

Формулу Бинэ можно переписать

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{\mu}{C^2}\,.$$

Это однородное дифференциальное уравнение с переменными $\frac{1}{r}$ и φ с постоянной правой частью. Его полное решение состоит из решения однородного уравнения:

$$\frac{1}{r} = C_1\cos(\varphi - C_2)$$

и частного решения полного уравнения:

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{C^2}\,,$$

т. е.

$$\frac{1}{r} = C_1\cos(\varphi - C_2) + \frac{\mu}{C^2}\,, \qquad (3)$$

C_1 и C_2 — постоянные интегрирования. Из (3) можно получить полярное расстояние движущейся точки в виде функции полярного угла, т. е. выражение траектории точки в полярных координатах

$$r = \frac{C^2/\mu}{1 + \frac{C_1 C^2}{\mu}\cos(\varphi - C_2)}.$$

Это выражение конического сечения в полярных координатах. Таким образом, траекторией движения точки, на которую действует центральная сила, обратно пропорциональная квадрату расстояния точки от центра силы, является некоторое коническое сечение (окружность, эллипс, парабола, гипербола), форма и размеры которого зависят от постоянных интегрирования, определяемых начальными условиями r_0, φ_0, $\dot{r}_0$, φ_0.

Коническое сечение принято выражать через параметр p и эксцентриситет e:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}.$$

Параметр $p = r$ при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, если полярная ось направлена в вершину (перицентр) конического сечения; в этом случае $C_2 = \varphi_0 = 0$. Эксцентриситет определяется отношением расстояния любой точки конического сечения от фокуса к расстоянию ее от директрисы, $e = \frac{r}{d}$. Всегда $p > 0$ и $e \geqslant 0$.

В рассматриваемых случаях для $\mu > 0$, т. е. для гравитационной силы и кулоновской силы притяжения,

$$p = \frac{C^2}{\mu}, \quad e = \frac{C_1 C^2}{\mu},$$

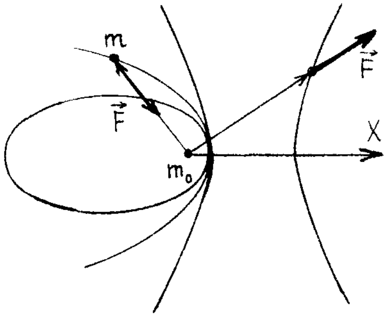


Рис. 23

траекторией точки может быть окружность ($p = r$, $e = 0$), эллипс ($0 < e < 1$), парабола ($e = 1$) и гипербола (ближайшая к центру силы, т. е. левая, ветвь; $e > 1$, рис. 23).

В случае $\mu < 0$ (для кулоновской силы отталкивания) движение точки может происходить только по гиперболе (рис. 23, правая ветвь). Так как всегда $r > 0$, то из

$$r = \frac{-C^2/|\mu|}{1 - \frac{C_1 C^2}{|\mu|}\cos\varphi} = \frac{p}{-1 + e\cos\varphi} > 0,$$

где $(-1 + e\cos\varphi) > 0$, $e\cos\varphi > 1$, $e > 1$.

§ 11. Общие теоремы динамики и законы сохранения

11.1. ИНТЕГРАЛЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Иногда, не имея возможности проинтегрировать дифференциальные уравнения движения точки (системы точек), т. е. найти их общее решение в виде

$$x_i = x_i(t, C_1, C_2, \ldots, C_{6n}),$$
$$y_i = y_i(t, C_1, C_2, \ldots, C_{6n}),$$
$$z_i = z_i(t, C_1, C_2, \ldots, C_{6n}),$$

можно получить некоторые интегралы дифференциальных уравнений (интегралы движения).

Интегралом движения называется некоторая функция от времени, координат, первых производных по времени от координат (проекций скоростей) точек, которая сохраняет свое значение, определяемое начальными условиями, во все время движения:

$$\Phi_\alpha(t, x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, z_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{y}_1, \ldots, \dot{z}_n) = C_\alpha, \ \alpha = 1, 2, 3, \ldots$$

Если интеграл дифференциальных уравнений содержит скорости, то он называется первым интегралом движения. Для одной точки это функции вида

$$\Phi_\alpha(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = C_\alpha, \ \alpha = 1, 2, 3, \ldots$$

Если интегралы содержат только время и координаты (и постоянные, определяемые начальными условиями), они называются вторыми интегралами движения:

$$\Psi_\beta(t, x_i, y_i, z_i, C_1, C_2, \ldots, C_{3n}) = C_\beta, \ \beta = 1, 2, 3, \ldots$$

Совсем необязательно, чтобы в выражение интеграла входили все координаты и все проекции скорости.

Знание интегралов движения позволяет получить решение задачи о движении точки (системы точек), не интегрируя дифференциальных уравнений движения. Чтобы полностью решить задачу о движении системы n точек, надо иметь $6n$ независимых первых интегралов движения (по числу неизвестных: $3n$

координат и $3n$ их производных по времени). Независимых вторых интегралов надо иметь только $3n$, так как они не содержат $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$, а только x_i, y_i, z_i.

11.2. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ, ИЛИ ЗАКОНЫ ИЗМЕНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

Общие теоремы динамики (механики) представляют собой законы изменения величин, характеризующих движение точки (системы точек): импульса, момента импульса, кинетической энергии в зависимости от величин, характеризующих действие сил. Изменение импульса связано с действующими силами, изменение момента импульса — с моментами сил, изменение кинетической энергии — с работой сил.

При выполнении определенных условий законы изменения приводят к законам сохранения, которые представляют собой интегралы дифференциальных уравнений движения. Другими словами, законы сохранения позволяют решить основную задачу механики (полностью или частично), не прибегая к интегрированию дифференциальных уравнений движения.

Законов изменения (или теорем) три: Закон изменения импульса; Закон изменения момента импульса; Закон изменения кинетической энергии.

11.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИН, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ ДВИЖЕНИЕ

Величины: импульс, момент импульса, кинетическая энергия — являются мерой движения, так как каждая из них выражается через массы точек и их скорости.

Импульс — это величина, определяемая произведением массы точки на вектор скорости $m\vec{v}$. Импульс системы точек определяется векторной суммой импульсов ее точек $\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i$.

Момент импульса точки относительно некоторого начала — это величина, определяемая векторным произведением радиуса-вектора точки относительно того же начала и ее импульса $[\vec{r}\cdot m\vec{v}]$. Момент импульса системы точек определяется векторной суммой моментов импульса ее точек $\sum_{i=1}^{n} [\vec{r}_i\cdot m_i\vec{v}_i]$.

Кинетическая энергия точки — это величина, определяемая половиной произведения массы точки на квадрат ее скорости $\frac{m\vec{v}^2}{2}$ (для краткости записи иногда будем обозначать кинетическую энергию буквой T). Кинетическая энергия системы точек определяется суммой кинетических энергий ее точек

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i\vec{v}_i^2}{2}; \quad \mathrm{T} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{T}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i\vec{v}_i^2}{2}.$$

11.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИН, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ ДЕЙСТВИЕ СИЛ

К таким величинам относятся собственно сила, момент силы и элементарная работа силы.

Вместо силы $\vec{F}$ иногда вводят импульс силы, определяемый произведением силы на время $\vec{F}dt$ — элементарный импульс силы.

Момент силы относительно некоторого начала или точки — это векторная величина, определяемая векторным произведением радиуса-вектора точки приложения силы относительно того же начала и вектора силы $[\vec{r}\vec{F}]$.

Элементарная работа силы — это величина, определяемая скалярным произведением вектора силы и вектора элементарного перемещения точки приложения силы $\vec{F}d\vec{r}$.

Элементарная работа силы может быть представлена в виде

$$\vec{F}d\vec{r} = Fdr\cos(\vec{F}\,\widehat{\ }\,d\vec{r}) = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

В случае системы n точек на каждую точку массы m_i, положение которой определяется радиусом-вектором $\vec{r}_i$, действуют со стороны остальных точек системы внутренние силы, которые будем обозначать $\vec{F}_i^{(i)}$, и со стороны точек, не входящих в данную систему, внешние силы, которые будем обозначать $\vec{F}_i^{(e)}$ (рис. 24).

Величину, определяемую векторной суммой всех внешних сил, действующих на точки системы, принято называть главным вектором внешних сил $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(e)}$. Для сокращения обозначается $\vec{F}^{(e)}$.

Главный вектор внутренних сил на основании третьего закона Ньютона равен нулю, $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(i)} = 0$.

Величина, определяемая векторной суммой моментов внешних сил, действующих на точки системы, называется главным моментом внешних сил $\sum_{i=1}^{n}[\vec{r}_i \vec{F}_i^{(e)}]$. Главный момент внешних сил часто обозначают $\vec{M}^{(e)}$.

Главный момент внутренних сил всегда равен нулю, т. е. $\sum_{i=1}^{n}[\vec{r}_i \vec{F}_i^{(i)}] = 0$. Докажите это.

$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(i)} d\vec{r}_i$ — элементарная работа всех внутренних сил; она в общем случае отлична от нуля. $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(e)} d\vec{r}_i$ — элементарная работа всех внешних сил.

11.5. УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ ЗАКОНОВ ИЗМЕНЕНИЯ И СОХРАНЕНИЯ

Законы изменения справедливы для любой механической системы точек и выполняются в любой момент времени, т. е. имеют универсальный характер.

Универсальный характер имеют и законы сохранения, так как связаны с основными свойствами пространства и времени, со свойствами симметрии пространства и времени.

Закон сохранения импульса связан с однородностью пространства: в силу однородности пространства свойства системы точек не меняются при параллельном переносе ее как целого в пространстве.

Закон сохранения момента импульса связан с изотропностью пространства: свойства системы точек не меняются при повороте в пространстве.

Закон сохранения механической энергии (для замкнутых систем и систем, находящихся во внешнем потенциальном силовом поле под действием внешних потенциальных сил) связан с однородностью времени.

§ 12. Закон изменения импульса и закон сохранения импульса

12.1. ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

Рассматриваем движение системы точек в инерциальной системе отсчета (рис. 24).

Запишем второй закон Ньютона для каждой точки системы

$$\frac{d}{dt}(m_i\vec{v}_i) = \vec{F}_i^{(i)} + \vec{F}_i^{(e)}$$

и сложим. Получим

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}(m_i\vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i^{(i)} + \vec{F}_i^{(e)}),$$

откуда (сумма производных равна производной суммы)

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{(e)}$$

или для краткости записи $\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = \vec{F}^{(e)}$, так как $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{(i)} = 0$ (§ 11.4).

Это математическое выражение закона изменения импульса:

Производная по времени от импульса системы точек равна главному вектору внешних сил, или

Изменение импульса системы точек за единицу времени численно равно главному вектору внешних сил.

Для одной точки закон изменения импульса совпадает со вторым законом Ньютона.

12.2. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

Если главный вектор внешних сил $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{(e)} = 0$ (для одной точки $\vec{F} = 0$), то

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = \overrightarrow{\text{const}}: \qquad (4)$$

импульс системы во все время движения не изменяется, имеет место закон сохранения импульса.

Условия, при которых импульс системы точек сохраняется:

1. Внешние силы отсутствуют, т. е. все $\vec{F}_i^{(e)} = 0$ (изолированная система точек, или замкнутая; или изолированная точка).
2. Внешние силы есть, но их действие скомпенсировано, т. е. $\vec{F}_i^{(e)} \neq 0$, но $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{(e)} = 0$.

Закон сохранения импульса (4) дает три первых интеграла движения в скалярной форме в виде

$$\Phi_\alpha (m_i, t, x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i) = C_\alpha,\ \alpha = 1,\ 2,\ 3.$$

(Выражение закона сохранения импульса (4) надо спроектировать на направления координатных осей).

12.3. СОХРАНЕНИЕ ИМПУЛЬСА В НЕКОТОРОМ НАПРАВЛЕНИИ

В реальных задачах главный вектор внешних сил может быть равен нулю в каком-либо определенном направлении, т. е. $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(e)} \neq 0$, но $\sum_{i=1}^{n} F_{ix}^{(e)} = 0$, тогда имеет место закон сохранения импульса в проекции на это направление

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i\Big)_x = \text{const} = C_x.$$

12.4. ЦЕНТР МАСС СИСТЕМЫ ТОЧЕК

Выразим импульс системы n точек, вычисленный относительно неподвижного начала O, через ее импульс, вычисленный относительно произвольной точки O', движущейся с некоторой скоростью относительно начала O (рис. 25). Так как радиус-вектор i-ой точки $\vec{r}_i = \vec{r}_{O'} + \vec{r}_i'$, а вектор скорости $\vec{v}_i = \vec{v}_{O'} + \vec{v}_i'$, где $\vec{v}_i'$ — скорость i-ой точки относительно O', то импульс системы в K

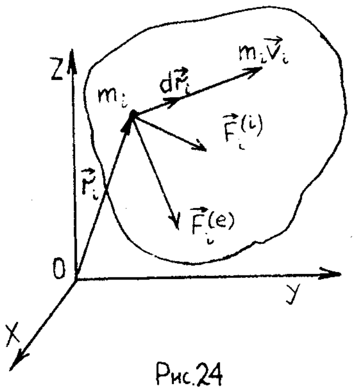


Рис.24

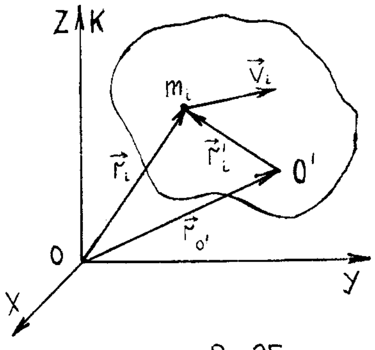


Рис.25

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i (\vec{v}_{O'} + \vec{v}_i') = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_{O'} + \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i' =$$

$$= \Big(\sum_{i=1}^{n} m_i\Big) \vec{v}_{O'} + \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i' = m \vec{v}_{O'} + \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i'.$$

Импульс системы точек, вычисленный относительно неподвижного начала (в инерциальной системе отсчета K), равен импульсу произвольной точки с массой, равной массе всех точек системы, вычисленный относительно того же начала, плюс импульс системы точек в движении относительно этой произвольной точки.

Если выбрать произвольную точку $O' = C$ так, чтобы относительно нее импульс системы равнялся нулю

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i'\Big)_c = 0,$$

то импульс системы будет равен импульсу этой точки при условии, что она обладает массой системы

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = m \vec{v}_c.$$

*Точка, относительно которой импульс системы точек равен нулю, называется **центром масс системы точек**.*

12.5. ПОЛОЖЕНИЕ ЦЕНТРА МАСС СИСТЕМЫ ТОЧЕК

Радиус-вектор центра масс системы точек в заданной системе отсчета K определяется из выражения импульса системы точек через его центр масс,

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = m \vec{v}_c,$$

откуда

$$\vec{v}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i}{m}.$$

Так как

$$\vec{v}_c = \frac{d}{dt} \vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{r}}_i}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}(m_i \vec{r}_i)}{m} = \frac{\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m},$$

то после интегрирования

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m}.$$

(Постоянная интегрирования равна нулю, так как точка, относительно которой $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i' = 0$, единственная).

В проекциях на направления координатных осей

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{m}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{m}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{m}.$$

Для $n = 2$ $\vec{r}_c = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$. Если начало координат поместить в центр масс, то $\vec{r}_c = 0$ и $m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0$.

12.6. ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС СИСТЕМЫ ТОЧЕК

Заменив в теореме об изменении импульса импульс системы через импульс центра масс:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \vec{F}^{(e)}, \quad \frac{d}{dt}(m\vec{v}_c) = \vec{F}^{(e)},$$

получим теорему о движении центра масс системы точек:

Центр масс системы точек в инерциальной системе отсчета движется, как точка, имеющая массу, равную массе системы, при условии, что все внешние силы приложены в центре масс.

$$m\vec{a}_c = \vec{F}^{(e)}.$$

Центр масс изолированной системы точек движется равномерно и прямолинейно (если $\vec{F}^{(e)} = 0$, то $m\vec{a}_c = 0$ и $m\vec{v}_c = \text{const}$).

Значение теоремы о движении центра масс: она позволяет использовать второй закон Ньютона не только для материальной точки, но и для тела (системы точек), заменяя движение тела движением его центра масс, если не учитывать вращательное движение и рассматривать только поступательное движение.

§ 13. Закон изменения момента импульса и закон сохранения момента импульса

13.1. ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

Для каждой точки системы точек, движущейся под действием внешних и внутренних сил (рис. 24), запишем второй закон Ньютона и умножим обе части векторно слева на радиус-вектор $\vec{r}_i$

$$\frac{d}{dt}(m_i\vec{v}_i) = \vec{F}_i^{(i)} + \vec{F}_i^{(e)},$$

$$\left[\vec{r}_i \frac{d}{dt}(m_i\vec{v}_i)\right] = \left[\vec{r}_i(\vec{F}_i^{(i)} + \vec{F}_i^{(e)})\right].$$

Левую часть можно заменить производной по времени от момента импульса i-ой точки:

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_i(m_i\vec{v}_i)\right] = \left[\frac{d\vec{r}_i}{dt}(m_i\vec{v}_i)\right] + \left[\vec{r}_i \frac{d}{dt}(m_i\vec{v}_i)\right] =$$

$$= \left[\vec{r}_i \frac{d}{dt}(m_i\vec{v}_i)\right],$$

так как $\dfrac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i$ и $\left[\dfrac{d\vec{r}_i}{dt}(m_i\vec{v}_i)\right] = 0$.

Сложим почленно полученные выражения, будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}[\vec{r}_i(m_i\vec{v}_i)] = \sum_{i=1}^{n}[\vec{r}_i(\vec{F}_i^{(i)} + \vec{F}_i^{(e)})],$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}[\vec{r}_i(m_i\vec{v}_i)] = \sum_{i=1}^{n}[\vec{r}_i\vec{F}_i^{(i)}] + \sum_{i=1}^{n}[\vec{r}_i\vec{F}_i^{(e)}].$$

Так как главный момент внутренних сил равен нулю (§ 11.4), то

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}[\vec{r}_i(m_i\vec{v}_i)] = \sum_{i=1}^{n}[\vec{r}_i\vec{F}_i^{(e)}],$$

или для краткости записи

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}[\vec{r}_i(m_i\vec{v}_i)] = \vec{M}^{(e)}.$$

Это закон изменения момента импульса:

Производная по времени от момента импульса системы точек, вычисленного в инерциальной системе отсчета, численно равна главному моменту внешних сил, действующих на точки системы,

или Изменение момента импульса системы точек за единицу времени равно главному моменту внешних сил, действующих на точки системы.

Можно показать, что теорема об изменении момента импульса системы точек справедлива и относительно центра масс системы

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}[\vec{r}_i(m_i\vec{v}_i)]_c = \vec{M}_c^{(e)}.$$

Для одной точки закон об изменении момента импульса имеет вид:

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}(m\vec{v})] = [\vec{r}\vec{F}].$$

Производная по времени от момента импульса точки, вычисленного относительно некоторого начала, равна моменту силы, действующей на точку, относительно того же начала.

Закон изменения момента импульса может быть записан в виде трех скалярных выражений, представляющих его проекции на координатные оси, которые удобно получить, используя представление векторного произведения через определитель третьего порядка

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ \dot{x}_i & \dot{y}_i & \dot{z}_i \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ F_{ix}^{(e)} & F_{iy}^{(e)} & F_{iz}^{(e)} \end{vmatrix}.$$

13.2. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

Если главный момент внешних сил равен нулю, то момент импульса системы точек остается постоянным:

$$\sum_{i=1}^{n}[\vec{r}_i\vec{F}_i^{(e)}] = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}[\vec{r}_i(m_i\vec{v}_i)] = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}[\vec{r}_i(m_i\vec{v}_i)] = \vec{C}. \qquad (5)$$

Закон сохранения момента импульса имеет место в следующих случаях.

1. Для изолированной системы точек, когда все внешние силы равны нулю, $\vec{F}_i^{(e)} = 0$.
2. Для случая, когда внешние силы скомпенсированы: $\vec{F}_i^{(e)} \neq 0$, но $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{(e)} = 0$.
3. Для центральных сил:

$$\vec{F}_i^{(e)}\uparrow\uparrow\vec{r}_i \text{ или } \vec{F}_i^{(e)}\uparrow\downarrow\vec{r}_i.$$

Наибольший интерес представляет случай центральных сил.

Закон сохранения момента импульса (5) в проекциях на направления координатных осей дает три скалярных выражения, которые представляют собой первые интегралы движения. Их легко получить, используя для (5) выражение

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ \dot{x}_i & \dot{y}_i & \dot{z}_i \end{vmatrix} = C_x\vec{i} + C_y\vec{j} + C_z\vec{k}$$

На практике может иметь место сохранение момента импульса системы точек в некотором направлении, если проекция главного момента внешних сил на это направление равна нулю.

13.3. ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Применим закон об изменении момента импульса к вращению твердого тела вокруг неподвижной оси (рис. 26)

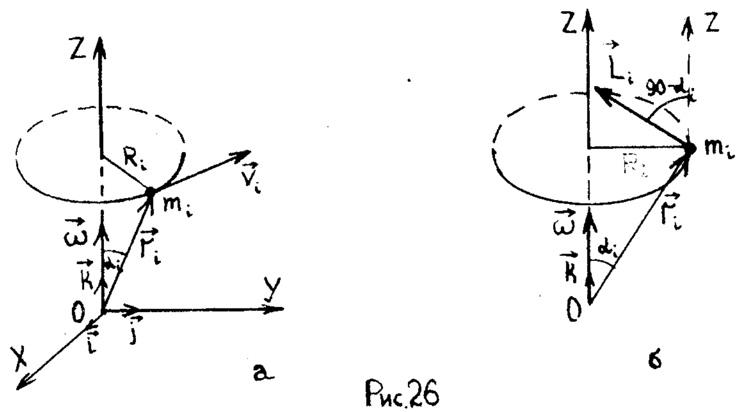


Рис.26

с угловой скоростью $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{k}$. Запишем для тела закон изменения момента импульса

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}[\vec{r}_i(m_i\vec{v}_i)] = \vec{M}^{(e)}$$

и возьмем его проекцию на ось вращения (ось Z). Сначала найдем проекцию момента импульса i-ой точки тела на ось Z. Пусть для удобства точка находится в плоскости чертежа (рис. 26б). Тогда момент импульса i-ой точки тоже лежит в этой плоскости, обозначим его $\vec{L}_i = [\vec{r}_i(m_i\vec{v}_i)]$. $\vec{L}_i$ перпендикулярен векторам $\vec{r}_i$ и $\vec{v}_i$, а $\vec{r}_i \perp \vec{v}_i$. $\vec{L}_i$ образует с осью Z угол, равный $90° - \alpha_i$, его проекция на ось Z равна

$$L_{iz} = L_i \cos(90° - \alpha_i) =$$
$$= (r_i m_i v_i \sin 90°)\sin\alpha_i = r_i \sin\alpha_i m_i v_i = R_i m_i v_i,$$

где R_i — радиус окружности, описываемой i-ой точкой вследствие вращения тела,

$$v_i = R_i\omega \text{ и } L_{iz} = R_i^2 m_i\omega.$$

Теперь закон изменения момента импульса твердого тела в проекции на ось вращения можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} R_i^2 m_i\omega = M_z^{(e)}.$$

В левой части угловую скорость ω можно вынести за знак суммы

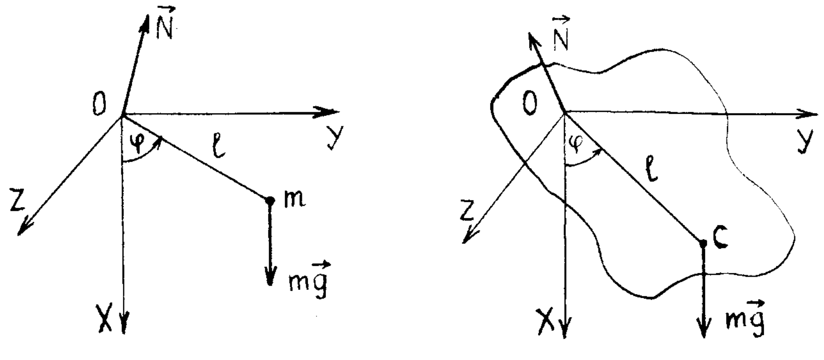
$$\sum_{i=1}^{n} R_i^2 m_i\omega = \Big(\sum_{i=1}^{n} R_i^2 m_i\Big)\omega = I_z\omega,$$

где $I_z = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2$ — момент инерции тела относительно оси вращения. Проекция момента импульса твердого тела на ось вращения (момент импульса тела относительно оси вращения) определяется произведением момента инерции тела относительно оси вращения на угловую скорость вращения тела, $L_z = I_z\omega$.

Окончательно закон изменения момента импульса тела относительно оси вращения можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}(I_z\omega) = M_z^{(e)}$$

или, так как момент инерции твердого тела — величина постоянная,



а Рис.27 б

$$I_z\frac{d\omega}{dt} = M_z^{(e)}.$$

Это дифференциальное уравнение вращательного движения тела вокруг неподвижной оси

$$I_z\ddot{\varphi} = M_z^{(e)},$$ [1]

где $M_z^{(e)}$ — проекция на ось вращения главного момента внешних сил, действующих на тело.

В качестве упражнения получите дифференциальное уравнение движения для математического и физического маятников (рис. 27). Обозначения: $\vec{N}$ — внешняя сила реакции связи, m — масса математического или физического маятника, I_z — момент инерции физического маятника, l — длина нити математического маятника и расстояние от оси вращения до центра масс C физического маятника (в плоскости чертежа), g — ускорение свободного падения.

Дифференциальные уравнения имеют вид:

$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi$ — для математического маятника,

$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{I_z/ml}\sin\varphi$ — для физического маятника. (Величина $I_z/ml = l_{\text{пр}}$ называется приведенной длиной физического маятника).

[1] Это уравнение часто называют вторым законом Ньютона для вращательного движения тела вокруг неподвижной оси.

§ 14. Закон изменения кинетической энергии и закон сохранения механической энергии

14.1. ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ДЛЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Запишем второй закон Ньютона для материальной точки

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}$$

и умножим обе части скалярно на вектор скорости точки $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, получим

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt}\vec{v} = \vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt},$$

откуда

$$\vec{v}d(m\vec{v}) = \vec{F}d\vec{r}.$$

Для постоянной массы это выражение можно записать в виде

$$d\frac{mv^2}{2} = \vec{F}d\vec{r}. \qquad (6)$$

Это закон изменения кинетической энергии для точки в дифференциальной форме:

Дифференциал кинетической энергии точки равен элементарной работе сил, действующих на точку, или

Изменение кинетической энергии точки за бесконечно малый промежуток времени равно элементарной работе сил, действующих на точку.

За конечный промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ изменение кинетической энергии точки при перемещении ее на пути 1—2 равно

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r},$$

где $\int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = A_{1-2}$ — работа сил, действующих на точку, за тот же промежуток времени. Это выражение закона изменения кинетической энергии точки в интегральной форме

$$T_2 - T_1 = A_{1-2}.$$

14.2. ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ТОЧЕК

Чтобы получить закон изменения кинетической энергии для системы точек (рис. 24), надо записать закон изменения кинетической энергии (6) для каждой точки системы и сложить

$$d\frac{m_iv_i^2}{2} = (\vec{F}_i^{(i)} + \vec{F}_i^{(e)})\,d\vec{r}_i, \quad \sum_{i=1}^{n} d\frac{m_iv_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i^{(i)}d\vec{r}_i + \vec{F}_i^{(e)}d\vec{r}_i),$$

$$d\sum_{i=1}^{n}\frac{m_iv_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{(i)}d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{(e)}d\vec{r}_i$$

или для краткости записи $dT = \delta A^{(i)} + \delta A^{(e)}$.

Дифференциал кинетической энергии системы точек равен сумме элементарных работ всех внутренних сил и всех внешних сил, действующих на точки системы. (Для обозначения элементарной работы внутренних сил $\delta A^{(i)}$ и внешних сил $\delta A^{(e)}$ используем греческую букву δ (дельта) вместо латинской d, чтобы подчеркнуть, что в общем случае элементарные работы этих сил не являются полными дифференциалами).

За конечный промежуток времени изменение кинетической энергии системы точек равно работе всех внутренних и всех внешних сил, действующих на точки системы, за этот же промежуток времени

$$T_2 - T_1 = A_{1-2}^{(i)} + A_{1-2}^{(e)}.$$

14.3. ВЫРАЖЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ СИСТЕМЫ ТОЧЕК ЧЕРЕЗ ЦЕНТР МАСС (ТЕОРЕМА КЁНИГА[1])

Движение любой системы точек можно представить как сумму поступательного движения со скоростью центра масс $\vec{v}_c$ и вращательного движения каждой точки системы вокруг центра масс со скоростью $\vec{v}_i'$ (рис. 25, $O' = C$). Скорость i-ой точки $\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_i'$. Кинетическую энергию системы точек в ИСО можно представить в виде

[1] Кёниг Самуэль (1712—1757) — голландский математик, член Парижской АН.

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i v_i^2}{2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{2}(\vec{v}_c^2+2\vec{v}_c\vec{v}_i'+\vec{v}_i'^2)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i v_c^2}{2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i v_i'^2}{2}=\frac{mv_c^2}{2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i v_i'^2}{2},$$

так как $\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{2}\cdot 2\vec{v}_c\vec{v}_i'=\vec{v}_c\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i'=0.$ (§ 12.4).

Кинетическая энергия системы точек равна сумме кинетической энергии центра масс системы при условии, что в нем сосредоточена масса всех точек системы, и кинетической энергии вращательного движения точек относительно центра масс.

$$\text{T}=\frac{mv_c^2}{2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i v_i'^2}{2}.$$

Получите выражение кинетической энергии для цилиндра, катящегося без скольжения по горизонтальной поверхности со скоростью v:

$$\text{T}=\frac{mv^2}{2}+\frac{I\omega^2}{2}.$$

14.4. СИЛОВОЕ ПОЛЕ

Область пространства, каждой точке которого соответствует определенное значение некоторой физической величины, называется полем этой величины. Поле может быть векторным, если эта величина векторная, $\vec{a}=\vec{a}(\vec{r})$, или скалярным, если эта величина скалярная, $\varphi=\varphi(\vec{r})$. Пример скалярного поля — поле температуры, пример векторного поля — поле силы, силовое поле, $\vec{F}=\vec{F}(\vec{r})=\vec{F}(x, y, z)$. Если сила не зависит от времени, силовое поле является стационарным. Гравитационное и кулоновское поля — силовые стационарные поля.

14.5. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ СИЛОВОЕ ПОЛЕ

Если в каждой точке поля сила может быть представлена как градиент некоторой скалярной функции $U=U(\vec{r})$

$$\vec{F}=\overrightarrow{\text{grad}}\,U,$$

то сила и ее поле называются потенциальными, а функция $U(\vec{r})$ — потенциальной функцией поля, или потенциалом поля, а также потенциалом силы.

В декартовой системе координат

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,U=\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k},$$

а силу можно представить в виде

$$\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k},$$

то

$$\frac{\partial U}{\partial x}=F_x,\quad \frac{\partial U}{\partial y}=F_y,\quad \frac{\partial U}{\partial z}=F_z,$$

т. е. в каждой точке силового потенциального поля проекция силы на координатную ось равна частной производной от потенциала по соответствующей координате.

14.6. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ РАБОТА ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ СИЛЫ

В потенциальном силовом поле элементарная работа силы равна полному дифференциалу потенциала, $\vec{F}d\vec{r}=dU$. Покажем это.

$$\vec{F}d\vec{r}=F_x dx+F_y dy+F_z dz=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz=dU.$$

14.7. НАХОЖДЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА СИЛЫ

1. Сначала нужно выяснить, потенциальна ли рассматриваемая сила. Для этого можно воспользоваться критерием потенциальности $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F}=0$, который в декартовых координатах имеет вид

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=0.$$

2. Получить полный дифференциал потенциала, используя

$$dU=\vec{F}d\vec{r}.$$

3. Проинтегрировать это выражение

$$U=\int\vec{F}d\vec{r}+C.$$

Постоянную C положить равной нулю, это определит точки поля, в которых потенциал равен нулю.

14.8. ВИДЫ СИЛ

Потенциальная сила. Она зависит от точки поля, $\vec{F}=\vec{F}(\vec{r})$. Элементарная работа такой силы представляет полный дифференциал потенциала поля, $\vec{F}d\vec{r}=dU$.

Диссипативная сила. Зависит от скорости точки, на которую действует, $\vec{F}=\vec{F}(\vec{v})$. Работа этой силы всегда отрицательна.

Гироскопическая сила. Она направлена перпендикулярно вектору скорости точки, на которую действует, $\vec{F}\perp\vec{v}$. Работа этой силы равна нулю, $\vec{F}d\vec{r}=0$.

14.9. ПРИМЕРЫ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

Потенциальными силовыми полями являются гравитационное и кулоновское силовые поля.

В гравитационном поле действует сила тяготения (§ 10.1, рис. 20)

$$\vec{F}=-\frac{Gm_0m}{r^3}\vec{r},$$

ее потенциал

$$U=\frac{Gm_0m}{r}.$$

С увеличением расстояния от центра поля потенциал уменьшается, при $r=\infty$ $U=0$.

В электрическом кулоновском поле действует кулоновская сила притяжения или отталкивания

$$\vec{F}=\mp\frac{ke_0e}{r^3}\vec{r},$$

потенциал этого поля

$$U=\pm\frac{ke_0e}{r}.$$

Потенциальным полем является однородное поле силы тяжести (рис. 28), $\vec{F}=+m\vec{g}=\text{const}$. Ее потенциал $U=-mgz<0$, потенциал уменьшается с высотой. При $z=0$ (на поверхности Земли) $U=0$.

Потенциальной силой является упругая (и квазиупругая) сила (рис. 17) $\vec{F}=-k\vec{r}=-kx\vec{i}$, направленная всегда к положению равновесия, принимаемому за начало координат. Потенциал этой силы

$$U=-\frac{kx^2}{2},$$

в положении равновесия потенциал равен нулю.

Используя указания § 14.7, получите выражения потенциалов этих сил.

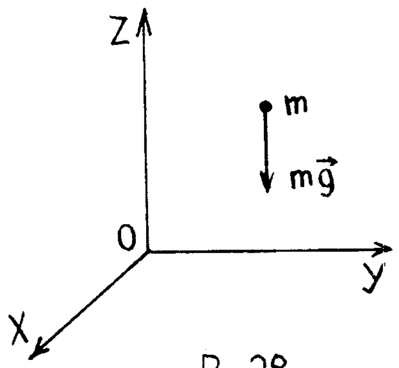


Рис.28

14.10. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПОТЕНЦИАЛА

Вычислим работу силы в потенциальном поле на пути между точками 1 и 2, потенциал поля в которых U_1 и U_2. Элементарная работа силы $\vec{F}d\vec{r}=dU$. Работа на пути между точками 1 и 2

$$A_{1-2}=\int_1^2 dU=U_2-U_1.$$

Работа потенциальной силы на пути между двумя точками поля равна разности потенциалов в конечной и начальной точках поля.

Пусть $U_1=0$ (такие точки поля, потенциал которых равен нулю, условно называют точками на «бесконечности»), тогда работа силы поля на пути из «бесконечности» (∞), где $U=0$, в данную точку (т) равна потенциалу поля в этой точке

$$A_{\infty-т}=U_т-O=U,$$

т. е. потенциал силового поля в данной точке численно равен работе силы поля на пути из «бесконечности», где потенциал равен нулю, в данную точку $U=A_{\infty-т}$.

14.11. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

Чтобы в данную точку поля с потенциалом U поместить из «бесконечности» материальную точку, на которую действует сила поля, необходимо совершить работу против силы поля, т. е. равную $-U$. В результате материальная точка, находящаяся в потенциальном силовом поле, обладает такой энергией, эта энергия называется потенциальной энергией. Потенциальная энергия материальной точки в потенциальном силовом поле численно равна потенциалу поля со знаком «минус», $\Pi = -U$.

В гравитационном поле, создаваемом массой m_0, материальная точка массы m, находящаяся на расстоянии r от m_0, обладает потенциальной энергией

$$\Pi = -\frac{Gm_0m}{r}.$$

В электрическом кулоновском поле, создаваемом положительным зарядом $+e_0$, материальная точка, несущая отрицательный заряд $-e$ и находящаяся на расстоянии r от e_0, обладает потенциальной энергией

$$\Pi = -\frac{ke_0e}{r}.$$

Потенциальная энергия материальной точки массы m в однородном поле силы тяжести зависит от высоты и равна

$$\Pi = mgz = mgh.$$

14.12. МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Материальная точка, движущаяся в потенциальном силовом поле, обладает кинетической и потенциальной энергией. Сумма кинетической и потенциальной энергии точки называется механической энергией точки

$$E = T + \Pi = \frac{mv^2}{2} - U.$$

14.13. ВНУТРЕННЯЯ ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ ТОЧЕК

Если внутренние силы системы точек потенциальны, такая система обладает внутренней потенциальной энергией, которая представляет собой энергию взаимодействия точек системы. Потенциальная энергия взаимодействия системы двух точек равна потенциальной энергии одной точки в силовом поле другой точки. Например, потенциальная энергия гравитационного взаимодействия некоторого тела массы m и Земли (масса M) равна потенциальной энергии этого тела в гравитационном поле Земли:

$$\Pi^{(i)} = -\frac{GMm}{r} \quad \text{(рис. 29).}$$

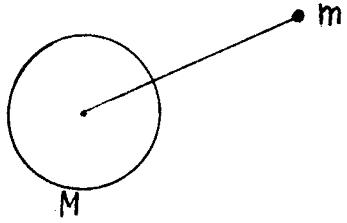


Рис.29

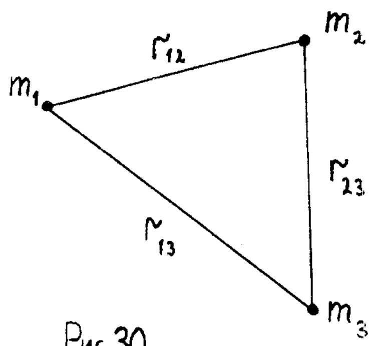


Рис.30

Чтобы вычислить значение внутренней потенциальной энергии системы точек, надо подсчитать работу против сил поля по построению данной конфигурации системы на пути из «бесконечности» в занимаемые точками положения.

Рассмотрим это на примере трех точек. Берем одну точку массы m_1, около нее имеется силовое поле, например, гравитационное. Точку массы m_2 перемещаем из «бесконечности» в поле точки m_1 (в некоторое положение на расстоянии r_{12} от m_1). Потенциальная энергия точки m_2 на расстоянии r_{12} от m_1 равна $\Pi_{21} = -U_{21}$. (Для гравитационного взаимодействия

$$\Pi_{21} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}}).$$

Эта энергия является энергией взаимодействия двух точек m_1 и m_2, т. е. внутренней потенциальной энергией системы двух точек. После того как построена конфигурация из двух точек, третью точку массы m_3 из «бесконечности» вносим уже в общее поле, создаваемое m_1 и m_2, на расстояние r_{13} и r_{23} соответственно от точек m_1 и m_2 (рис. 30). Потенциальная энергия точки m_3 состоит из двух частей $\Pi_{3(12)} = -(U_{31} + U_{32})$. (Для гравитационных сил

$$\Pi_{3(12)} = -\frac{Gm_1m_3}{r_{13}} - \frac{Gm_2m_3}{r_{23}}).$$

Энергия взаимодействия системы трех точек, их внутренняя потенциальная энергия, $\Pi_{123} = -(U_{21} + U_{31} + U_{32})$. Для гравитационных сил

$$\Pi_{123} = -\left(\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}}\right).$$

Так как все точки совершенно равноправны, то потенциал точки массы m_i в поле силы массы $m_\nu (U_{i\nu})$ равен потенциалу точки m_ν в поле силы $m_i (U_{\nu i})$, $U_{i\nu} = U_{\nu i}$, поэтому общее число членов в выражении внутренней потенциальной энергии системы n точек равно половине числа сочетаний $i\nu$ при условии, что $i \neq \nu$. Потенциальная энергия системы n точек может быть вычислена по формуле

$$\Pi^{(i)} = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,\nu=1 \\ i\neq\nu}}^{n} U_{i\nu}.$$

(Для гравитационных сил

$$\Pi^{(i)} = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,\nu=1 \\ i\neq\nu}}^{n} \frac{Gm_i m_\nu}{r_{i\nu}}\Big).$$

Система точек, внутренние силы которой потенциальны, называется консервативной. Таковы Солнечная система, твердое тело. Для твердого тела внутренняя потенциальная энергия постоянна, хотя неопределенна.

14.14. ВНЕШНЯЯ ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ ТОЧЕК. МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ ТОЧЕК

Если консервативная система точек движется во внешнем потенциальном силовом поле, то она обладает еще и внешней потенциальной энергией $\Pi^{(e)}$. Так, внешняя потенциальная энергия камня массы m, движущегося на некоторой высоте h в однородном поле силы тяжести Земли, равна $\Pi^{(e)} = mgh$.

Сумма кинетической энергии системы точек, ее внутренней потенциальной энергии и внешней потенциальной энергии называется механической энергией системы точек

$$\mathrm{E} = \mathrm{T} + \Pi^{(i)} + \Pi^{(e)}.$$

14.15. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ТОЧКИ

Для точки, движущейся в потенциальном силовом поле, имеет место закон сохранения механической энергии.

Закон изменения кинетической энергии для точки

$$d\frac{mv^2}{2} = \vec{F} d\vec{r}$$

в потенциальном силовом поле имеет вид

$$d\frac{mv^2}{2} = dU.$$

Это выражение можно проинтегрировать

$$\frac{mv^2}{2} = U + C. \qquad (7)$$

Постоянная интегрирования равна механической энергии точки в начальный момент

$$C = \frac{mv_0^2}{2} - U_0 = \mathrm{T}_0 + \Pi_0 = \mathrm{E}_0.$$

Выражение (7) можно переписать

$$\frac{mv^2}{2} - U = \mathrm{E}_0 \quad \text{или} \quad \mathrm{T} + \Pi = \mathrm{E}_0 = \mathrm{const}.$$

При движении точки в потенциальном силовом поле ее механическая энергия не меняется, сохраняет свое значение.

14.16. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ СИСТЕМЫ ТОЧЕК

Закон изменения кинетической энергии для системы точек

$$d\mathrm{T} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(i)} d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(e)} d\vec{r}_i \qquad (8)$$

для случая, когда внутренние и внешние силы потенциальны, приводит к закону сохранения механической энергии системы точек.

В самом деле, если элементарные работы внутренних и внешних сил представляют собой полные дифференциалы потенциалов внутренних и внешних сил

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(i)} d\vec{r}_i = dU^{(i)},$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(e)} d\vec{r}_i = dU^{(e)},$$

то закон (8) можно переписать $d\mathrm{T} = dU^{(i)} + dU^{(e)}$ и после интегрирования получим

$$\mathrm{T} = U^{(i)} + U^{(e)} + C. \qquad (9)$$

Постоянная интегрирования $C = \mathrm{T}_0 - U_0^{(i)} - U_0^{(e)} = \mathrm{T}_0 + \Pi_0^{(i)} + \Pi_0^{(e)} = \mathrm{E}_0$ представляет собой начальную механическую энергию системы точек.

Закон (9) можно переписать

$$\mathrm{T} + \Pi^{(i)} + \Pi^{(e)} = \mathrm{E}_0 = \mathrm{const}.$$

Для консервативной системы точек, движущейся во внешнем потенциальном силовом поле, механическая энергия не изменяется.

Для замкнутой системы точек $\Pi^{(e)} = 0$, поэтому сохраняется кинетическая и внутренняя потенциальная энергия. В таком виде $\mathrm{T} + \Pi^{(i)} = \mathrm{const}$ закон сохранения механической энергии выполняется, например, для Солнечной системы (действие звезд практически равно нулю).

Для твердого тела $\Pi^{(i)} = \mathrm{const}$, поэтому закон сохранения механической энергии выполняется в виде $\mathrm{T} + \Pi^{(e)} = \mathrm{const}$.

§ 15. Применение законов изменения к движению точки в центральном поле

15.1. ЧЕТЫРЕ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛА ДВИЖЕНИЯ

Мы уже рассматривали движение точки под действием центральной силы (§ 10), там мы интегрировали дифференциальные уравнения движения точки.

Для изучения движения точки в центральном поле можно воспользоваться законами изменения.

Так как в центральном поле сила всегда направлена по радиусу-вектору точки, то ее момент относительно центра поля равен нулю, $[\vec{r}\vec{F}] = 0$, поэтому в центральном поле всегда имеет место закон сохранения момента импульса точки

$$[\vec{r}\,(m\vec{v})] = \overrightarrow{\mathrm{const}} = \vec{L}_0 \qquad (10)$$

Так как центральное поле $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ всегда потенциально ($\vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\; U$, или $\vec{F}d\vec{r} = dU$), то для движущейся в нем материальной точки имеет место закон сохранения механической энергии

$$\frac{mv^2}{2} + \Pi = \mathrm{E}_0. \qquad (11)$$

Из закона сохранения момента импульса точки (10) следует, что момент импульса точки перпендикулярен плоскости, в которой лежат ее начальные радиус-вектор $\vec{r}_0$ и вектор скорости $\vec{v}_0$, т. е. движение точки в центральном поле всегда плоское, поэтому для его описания достаточно двух координат и двух их производных по времени (в декартовых координатах это x, y, $\dot{x}$, $\dot{y}$; в полярных координатах это r, φ, $\dot{r}$, $\dot{\varphi}$. Другими словами, для полного описания движения точки в центральном поле достаточно четырех независимых первых интегралов движения (§ 11.1).

Закон сохранения момента импульса (10), записанный в виде

$$[\vec{r}\,(m\vec{v})] = m\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = L_{0_x}\vec{i} + L_{0_y}\vec{j} + L_{0_z}\vec{k},$$

позволяет получить три первых интеграла движения

$$\begin{aligned} y\dot{z} - z\dot{y} &= L_{0x}, \\ z\dot{x} - x\dot{z} &= L_{0y}, \\ x\dot{y} - y\dot{x} &= L_{0z}. \end{aligned} \qquad (12)$$

Они называются интегралами площадей.

Закон сохранения механической энергии (11) представляет собой еще один первый интеграл движения (по счету четвертый)

$$\frac{mv^2}{2} + \Pi = \mathrm{E}_0. \qquad (13)$$

Таким образом, два закона сохранения полностью позволяют решить задачу о движении точки в центральном силовом поле.

15.2. ТРИ ВТОРЫХ ИНТЕГРАЛА ДВИЖЕНИЯ

Задачу о плоском движении точки в центральном силовом поле можно решить полностью, имея два независимых вторых интеграла движения. Законы сохранения позволяют найти эти интегралы. Получим их.

Три интеграла площадей (12) умножим соответственно на x, y, z и сложим почленно:

$$L_{0x}x + L_{0y}y + L_{0z}z = 0 \text{ —}$$

это уравнение плоскости, в которой происходит движение точки. Если ось Z направить вдоль $\vec{L}_0$, тогда $L_{0x} = L_{0y} = 0$ и плоскость $L_{0}z = 0$ является плоскостью XOY (рис. 31). $L_0 z = 0$ — это один из вторых интегралов движения; он еще раз убеждает нас в том, что движение точки в центральном поле плоское.

Чтобы найти еще два вторых интеграла движения, которые полностью описывают движение точки в ее плоскости движения, перейдем к полярным координатам (рис. 31): $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$. Первые интегралы движения (12) и (13) в полярных координатах имеют вид:
интеграл площадей

$$mr^2\dot{\varphi} = L_0, \tag{14}$$

интеграл энергии

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \Pi = E_0. \tag{15}$$

Исключим $\dot{\varphi}$ из (15), используя (14) $\dot{\varphi} = \frac{L_0}{mr^2}$,

$$\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{L_0^2}{m^2r^2}\right) + \Pi = E_0,$$

откуда

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m}\left[E_0 - \left(\Pi + \frac{L_0^2}{2mr^2}\right)\right]. \tag{16}$$

Так как в центральном силовом поле потенциальная энергия точки зависит только от положения точки, то в выражении (16) можно разделить переменные

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E_0 - \left(\Pi + \frac{L_0^2}{2mr^2}\right)\right]}$$

и взять интеграл, если известна зависимость $\Pi = \Pi(r)$,

$$t = \pm\int\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E_0 - \left(\Pi + \frac{L_0^2}{2mr^2}\right)\right]}} + C. \tag{17}$$

Это еще один второй интеграл (второй по счету).

Из (17) можно получить уравнение движения

$$r = r(t) \tag{18}$$

и, подставив его в $mr^2\dot{\varphi} = L_0$,
найти еще один интеграл движения (третий по счету):

$$\varphi = \pm\int\frac{L_0}{mr^2(t)}\,dt + C, \tag{19}$$

который представляет собой второе уравнение движения точки

$$\varphi = \varphi(t).$$

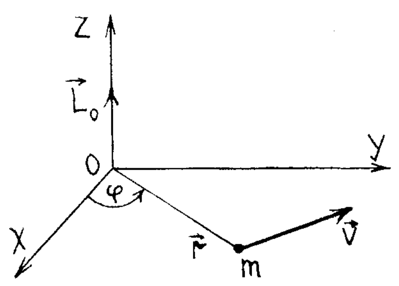


Рис.31

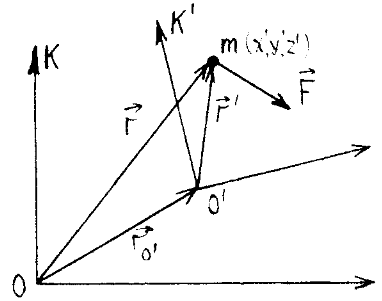


Рис.32

Два вторых интеграла (17) и (19) полностью определяют движение точки в плоскости $L_0z = 0$.

В частности, исключив из (17) и (19) время, получим уравнение траектории в виде

$$\varphi = \pm\int\frac{(L_0/mr^2)\,dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E_0 - \left(\Pi + \frac{L_0^2}{2mr^2}\right)\right]}} + C.$$

§ 16. Движение точки в неинерциальной системе отсчета (Динамика относительного движения точки)

16.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Чтобы решить основную задачу механики для относительного движения точки (§ 5), надо составить дифференциальные уравнения движения в системе отсчета K' (рис. 32) и, проинтегрировав их совместно, получить уравнения относительного движения точки, т. е.

$$x' = x'(t, C_1, C_2, \ldots, C_6),$$
$$y' = y'(t, C_1, C_2, \ldots, C_6),$$
$$z' = z'(t, C_1, C_2, \ldots, C_6).$$

Постоянные интегрирования $C_1, \ldots, C_6$ определяются по начальным условиям движения.

Для получения дифференциальных уравнений точки в системе K' воспользуемся вторым законом Ньютона $m\vec{a}_{абс} = \vec{F}$, и теоремой Кориолиса:

$$m(\vec{a}_{отн} + \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{кор}) = \vec{F},$$

откуда

$$m\vec{a}_{отн} = \vec{F} - m\vec{a}_{пер} - m\vec{a}_{кор}. \qquad (20)$$

Величины $-m\vec{a}_{пер} = \vec{I}_{пер}$ и $-m\vec{a}_{кор} = \vec{I}_{кор}$ называются **силами инерции:** $-m\vec{a}_{пер}$ — переносная сила инерции, или сила инерции от переносного движения, $-m\vec{a}_{кор}$ — кориолисова сила инерции, или сила инерции Кориолиса.

Добавление сил инерции сохраняет общее выражение второго закона Ньютона в неинерциальных системах отсчета: чтобы записать второй закон Ньютона в НИСО, надо к силам, действующим на точку со стороны известных тел, добавить силы инерции:

$$m\vec{a}_{отн} = \vec{F} + \vec{I}_{пер} + \vec{I}_{кор}. \qquad (21)$$

Дифференциальные уравнения относительного движения точки получим, взяв проекции выражения (21) на оси координат системы K'.

$$m\ddot{x}' = F_{x'} + I_{пер\,x'} + I_{кор\,x'},$$
$$m\ddot{y}' = F_{y'} + I_{пер\,y'} + I_{кор\,y'},$$
$$m\ddot{z}' = F_{z'} + I_{пер\,z'} + I_{кор\,z'}.$$

Примеры решения конкретных задач даны в 16.6 и 16.7.

16.2. СИЛЫ ИНЕРЦИИ

Добавление сил инерции сохраняет математическое выражение второго закона Ньютона в неинерциальной системе отсчета.

Силы инерции, действующие на точку, движение которой рассматривается в НИСО, являются реальными силами, так как их можно измерить. Но в отличие от сил, действующих на движущуюся точку со стороны других реальных точек (тел), источник сил инерции не очевиден. В теории относительности считается, что силы инерции являются результатом взаимодействия рассматриваемой точки со всеми телами, относительно которых инерциальная система отсчета K неподвижна.

16.3. УСЛОВИЯ, ПРИ КОТОРЫХ СИСТЕМА K' ЯВЛЯЕТСЯ ИНЕРЦИАЛЬНОЙ. ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ГАЛИЛЕЯ

Чтобы система K' была инерциальной, в ней второй закон Ньютона должен иметь вид $m\vec{a}_{отн} = \vec{F}$, т. е. силы инерции должны быть равны нулю: $\vec{I}_{пер} = 0$, $\vec{I}_{кор} = 0$.

Чтобы кориолисова сила инерции

$\vec{I}_{кор} = -2m[\vec{\omega}_{K'}\vec{v}_{отн}] = 0$, необходимо, чтобы $\vec{\omega}_{K'} = 0$, т. е. чтобы система K' не вращалась (двигалась поступательно).

Чтобы сила инерции от переносного движения

$$\vec{I}_{пер} = -m\left(\vec{a}_{0'} + \frac{d}{dt}[\vec{\omega}_{K'}\vec{r}']_{r'=\mathrm{const}}\right) = 0,$$

нужно, чтобы

$$\vec{a}_{0'} = \frac{d\vec{v}_{0'}}{dt} = 0,$$

а значит, $\vec{v}_{0'} = \overrightarrow{\mathrm{const}}$. Другими словами, нужно, чтобы система K' двигалась равномерно и прямолинейно относительно системы K.

Таким образом, система K' является инерциальной системой отсчета, если она движется относительно другой инерциальной системы отсчета K равномерно и прямолинейно.

Так как во всех инерциальных системах отсчета механические законы имеют один и тот же вид, то никакими механическими опытами нельзя установить, покоится инерциальная система K' или движется равномерно и прямолинейно относительно другой инерциальной системы K (принцип относительности Галилея).

Но если система K' неинерциальна, то опытным путем (на практике) это можно установить, можно оценить отклонение системы K' от инерциальности. Так, опытами установлено, что Земля как система отсчета является неинерциальной системой.

16.4. НЕИНЕРЦИАЛЬНОСТЬ СИСТЕМ ОТСЧЕТА, ЗАКРЕПЛЕННЫХ НА ЗЕМЛЕ

Системы отсчета, закрепленные на Земле, являются неинерциальными, так как Земля не движется равномерно и прямолинейно относительно условно инерциальной системы, связанной, например, со звездами: Земля движется по эллипсу вокруг Солнца и вращается вокруг своей оси.

Движение Земли вокруг Солнца происходит по эллиптической орбите, близкой к круговой, на среднем расстоянии от Солнца $150 \cdot 10^6$ км со средней скоростью около 30 км/с; угловая скорость орбитального движения Земли составляет $\omega_1 = \frac{30}{150 \cdot 10^6}$ рад/с $= 2{,}0 \cdot 10^{-7}$ рад/с, поэтому во многих задачах искривлением орбитальной траектории Земли можно пренебречь, считая, что ее центр относительно звезд движется равномерно и прямолинейно

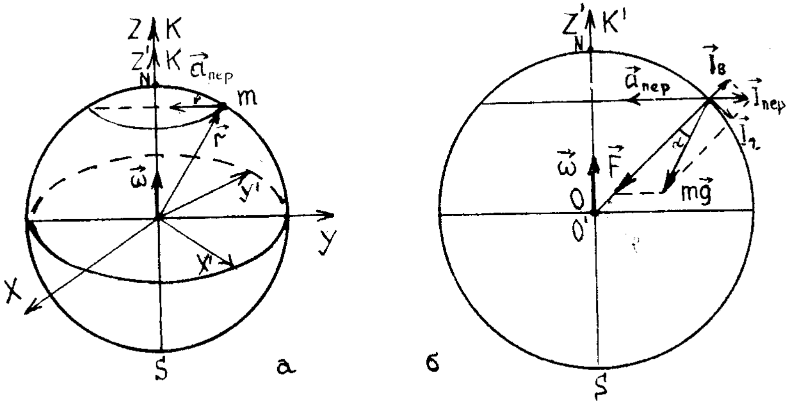


Рис.33

(и даже относительно Солнца для небольших промежутков времени). Другими словами, систему отсчета, связанную с центром Земли можно считать практически инерциальной. В большинстве задач орбитальным движением Земли вообще можно пренебречь, тогда систему, связанную с центром Земли, можно принимать за условно неподвижную инерциальную систему отсчета.

Вращение Земли вокруг оси происходит с угловой скоростью $\omega = 7{,}3 \cdot 10^{-5}$ рад/с (Земля делает один оборот вокруг оси за 23 ч 56 мин). В результате любая точка на поверхности Земли имеет переносное ускорение $a_{пер} = \omega^2 R \cos\varphi$, оно направлено по радиусу параллели этой точки к оси вращения Земли (рис. 33а). Радиус Земли $R = 6400$ км, φ — географическая широта. На рис. 33 ось Z инерциальной системы отсчета K совмещена с осью вращения Земли, плоскость XY совпадает с плоскостью экватора, начало координат находится в центре Земли. Так как орбитальное движение не учитывается, оси системы K направлены к некоторым звездам. Начало НИСО K' совмещено с центром Земли, ось Z' направлена тоже по оси вращения. Оси X' и Y', расположенные в плоскости экватора, неизменно скреплены с Землей, поэтому система K' вращается относительно системы K с угловой скоростью Земли. Точка m находится на широте φ и описывает параллель радиуса $R\cos\varphi$. Радиус-вектор точки $\vec{r}$ в системе K совпадает с относительным радиусом-вектором $\vec{r}'$ (в системе K') $\vec{r} = \vec{r}' = \vec{R}$, так как $\vec{r}_{0'} = 0$. Так как точка не движется по поверхности Земли (относительная скорость $\vec{v}_{отн} = 0$), то кориолисово ускорение отсутствует. На точку действуют сила притяжения Земли

$$\vec{F} = -\frac{Gm_{\oplus}m}{R^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

и сила инерции от переносного движения $\vec{I}_{пер} = -m\vec{a}_{пер}$ (рис. 33б). Так как $\vec{I}_{пер}$ действует всегда и везде, кроме земных полюсов, то ее действие складывается с силой притяжения Земли и их сумма представляет собой силу тяжести в данном месте

$$\vec{F} + \vec{I}_{пер} = m\vec{g}.$$

Действие переносной силы инерции проявляется в отклонении силы тяжести от направления к центру Земли (от вертикали), в изменении силы тяжести (ускорения свободного падения) в зависимости от широты места и в сжатии Земли.

Из рис. 33б видно, что сила тяжести $m\vec{g}$ не совпадает с направлением к центру Земли (за исключением точек на экваторе и полюсов), хотя угол отклонения α очень мал. Для количественных оценок $\vec{I}_{пер}$ можно разложить на две составляющие: вертикальную (по направлению радиуса Земли вверх) и горизонтальную (по касательной к меридиану в направлении на юг), $\vec{I}_{пер} = \vec{I}_в + \vec{I}_г$,

$$I_в = I_{пер}\cos\varphi = m\omega^2 R\cos^2\varphi,$$
$$I_г = I_{пер}\sin\varphi = m\omega^2 R\cos\varphi\sin\varphi.$$

Отклонение от вертикали (от направления к центру Земли) можно оценить по формуле $I_г = \alpha mg$,

$$\alpha = \frac{\omega^2 R\cos\varphi\sin\varphi}{g}.$$

Оно очень мало. Так, для широты 45°, где отклонение наибольшее, угол $\alpha = 6'$, поэтому можно считать, что сила тяжести $m\vec{g}$ всюду на Земле направлена к центру Земли.

Так как каждой точке северного полушария Земли есть симметричная точка в южном полушарии, то действие горизонтальных составляющих переносной силы инерции приводит к сжатию Земли. Земля сжата в направлении к плоскости экватора: ее полярный радиус $R_{90} = b$ меньше экваториального $R_0 = a$ примерно на 21 км, и сжатие Земли составляет

$$\varepsilon = \frac{a-b}{a} = 1:298.$$

(Принятые в 1979 году значения: $a = 6378{,}140$ км, $b = 6356{,}755$ км, $\varepsilon = 1:298{,}257$). Наша Земля не является шаром.

Вертикальная составляющая $\vec{I}_{пер}$ уменьшает гравитационную силу, поэтому сила тяжести на широте φ равна

$$mg = F - I_в = \frac{Gm_{\oplus}m}{R^2} - m\omega^2 R\cos^2\varphi = m\left(\frac{Gm_{\oplus}}{R^2} - \omega^2 R\cos^2\varphi\right),$$

откуда для ускорения свободного падения

$$g = \frac{Gm_{\oplus}}{R^2}\left(1 - \frac{\omega^2 R^3 \cos^2\varphi}{Gm_{\oplus}}\right).$$

На полюсе ($\varphi = 90°$) ускорение наибольшее, поэтому для любой широты (без учета сжатия Земли) ускорение свободного падения можно вычислить по формуле $g_{\varphi} = g_{90}\,(1 - 0{,}0034\cos^2\varphi)$. Ускорение на полюсе $g_{90} = 9{,}832$ м/с^2, ускорение на экваторе $g_0 = 9{,}798$ м/с^2.

16.5. КОРИОЛИСОВА СИЛА ИНЕРЦИИ НА ЗЕМЛЕ

Кориолисова сила инерции

$$\vec{I}_{\text{кор}} = -m\vec{a}_{\text{кор}} = -2m\,[\vec{\omega}\vec{v}_{\text{отн}}]$$

проявляет себя, если точка на Земле движется ($\vec{v}_{\text{отн}} \neq 0$), за исключением случаев, когда $\vec{v}_{\text{отн}}\uparrow\uparrow\vec{\omega}$ и $\vec{v}_{\text{отн}}\uparrow\downarrow\vec{\omega}$. Такой случай, в частности, реализуется при пересечении экватора по меридиану.

Сила Кориолиса, как правило, мала. Так, для точки, движущейся со скоростью 72 км/ч = 20 м/с по меридиану в направлении на север на широте 60° кориолисово ускорение равно

$$a_{\text{кор}} = 2 \cdot 7{,}3 \cdot 10^{-5} \cdot 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{м/с}^2 = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{м/с}^2,$$ что составляет меньше $3 \cdot 10^{-4} g$. Поэтому в большинстве задач силу Кориолиса не учитывают. Однако в ряде случаев она себя проявляет: снашивание правых рельсов, подмывание правого берега рек в северном полушарии Земли, отклонение артиллерийских оперенных снарядов, отклонение ветров, отклонение течений в океане. В северном полушарии сила Кориолиса обычно действует в горизонтальной плоскости и направлена вправо по ходу движения.

16.6. СВОБОДНОЕ ПАДЕНИЕ ТЕЛ НА ЗЕМЛЕ

Рассмотрим решение основной задачи механики для случая материальной точки, падающей свободно с высоты $h \ll R$ без начальной скорости ($\vec{v}_{\text{отн}} = 0$) на географической широте φ.

Систему K' выберем следующим образом (рис. 34): начало O' поместим на поверхности Земли, ось Z' направим вверх по истинной вертикали (по направлению $m\vec{g}$), но отклонением ее от радиуса Земли пренебрежем (будем считать, что истинная вертикаль совпадает с радиусом Земли), не учитываем сжатия Земли, ось X' направим по касательной к меридиану на юг, ось Y' — по касательной к параллели на восток; $\vec{r}_{o'} = \vec{R}$. Буквой M на рис. 34 отмечено положение падающей точки в произвольный момент времени.

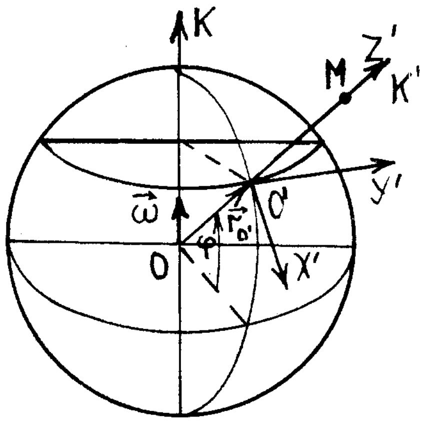


Рис34

Начальные условия движения: в момент $t_0 = 0$, $x'_0 = 0$, $y'_0 = 0$, $z'_0 = h$, $\dot{x}'_0 = 0$, $\dot{y}'_0 = 0$, $\dot{z}'_0 = 0$.

Решение задачи сводится к отысканию уравнений движения падающей точки

$$x' = x'(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6),$$
$$y' = y'(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6),$$
$$z' = z'(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6),$$

Постоянные интегрирования $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ определяются по начальным условиям.

В произвольный момент времени на точку действуют силы: сила притяжения Земли

$$\vec{F} = -\frac{Gm_{\oplus}m}{R^2}\frac{\vec{r}}{r},$$

сила инерции от переносного движения $\vec{I}_{\text{пер}} = -m\vec{a}_{\text{пер}}$, кориолисова сила инерции $\vec{I}_{\text{кор}} = -2m\,[\vec{\omega}\vec{v}_{\text{отн}}]$. Запишем для точки второй закон Ньютона в системе K'

$$m\vec{a}_{\text{отн}} = \vec{F} + \vec{I}_{\text{пер}} + \vec{I}_{\text{кор}},$$

или

$$m\vec{a}_{\text{отн}} = m\vec{g} - 2m\,[\vec{\omega}\vec{v}_{\text{отн}}].$$

Так как считаем, что $m\vec{g}$ направлена по радиусу Земли, то ее проекции на координатные оси K' равны: на ось X' и на ось Y' нулю, на ось Z' — $(-mg)$. Для нахождения проекций на эти оси силы инерции Кориолиса представим ее в виде определителя

$$\vec{I}_{\text{кор}} = -2m \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ -\omega\cos\varphi & 0 & \omega\sin\varphi \\ \dot{x}' & \dot{y}' & \dot{z}' \end{vmatrix}$$

Теперь можно записать дифференциальные уравнения движения падающей точки. (Далее штрихи опустим).

$$m\ddot{x} = 2m\omega \sin\varphi \cdot \dot{y},$$
$$m\ddot{y} = -2m\omega \sin\varphi \cdot \dot{x} - 2m\omega \cos\varphi \cdot \dot{z},$$
$$m\ddot{z} = -mg + 2m\omega \cos\varphi \cdot y,$$

или

$$\ddot{x} = 2\omega \sin\varphi \cdot \dot{y},$$
$$\ddot{y} = -2\omega \sin\varphi \cdot \dot{x} - 2\omega \cos\varphi \cdot \dot{z},$$
$$\ddot{z} = -g + 2\omega \cos\varphi \cdot \dot{y}.$$

Каждое из этих уравнений можно проинтегрировать один раз независимо друг от друга. Получим

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2\omega \sin\varphi \cdot y, \\ \dot{y} &= -2\omega \sin\varphi \cdot x - 2\omega \cos\varphi \cdot z + 2\omega \cos\varphi \cdot h, \\ \dot{z} &= -gt + 2\omega \cos\varphi \cdot y. \end{aligned} \tag{22}$$

Постоянные интегрирования $C_1 = C_3 = 0$, $C_2 = 2\omega \cos\varphi \cdot h$.

Далее уравнения (22) надо интегрировать совместно. Например, из первого выразить y и подставить в третье, получим

$$\dot{z} = -gt + \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\dot{x}.$$

Это уравнение после умножения на dt можно проинтегрировать:

$$z = h - \frac{gt^2}{2} + \frac{x}{\operatorname{tg}\varphi}.$$

Постоянная интегрирования $C_4 = h$. Мы получили уравнение движения точки по вертикали. (Если не учитывать вращения Земли, то имели бы

$$z = h - \frac{gt^2}{2} -$$

уравнение свободного падения точки без начальной скорости).

Дальнейшее интегрирование уравнений (22) можно найти в учебнике О. В. Голубевой Теоретическая механика. М.: Высш. шк., 1968, с. 127—130. Приведем результаты:

$$x = \frac{g \sin\varphi \cos\varphi}{2}\left(1 - \frac{\sin^2 \omega t}{\omega^2 t^2}\right) t^2,$$

$$y = \frac{g \cos\varphi}{2\omega}\left(1 - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega t}\right) t,$$

$$z = h - \frac{gt^2}{2}\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi \frac{\sin^2 \omega t}{\omega^2 t^2}\right).$$

Это уравнения относительного падения точки.

Как видно из этих уравнений, действие силы Кориолиса

приводит к отклонению точки к югу ($x > 0$) и к востоку ($y > 0$). Кроме того, падение точки несколько замедляется (см. $\dot{z}$).

Количественные оценки результатов показывают, что отклонение к югу $x \sim \omega^2 t^2$, а отклонение к востоку $y \sim \omega t$, т. е. y в ωt раз больше x. Отклонение к востоку на широте 60° для высоты 100 м составляют около 10 мм. Опытные измерения отклонения к востоку подтверждают эти результаты.

16.7. ВРАЩЕНИЕ ПЛОСКОСТИ КАЧАНИЯ МАЯТНИКА НА ЗЕМЛЕ

Рассмотрим малые колебания математического маятника массы m, подвешенного на невесомой нерастяжимой нити длиной l в точке на оси Z' на достаточно большой высоте $h = l$. Система K' выбрана так же, как в 16.6 (рис. 35). Штрихи всюду опускаем. На маяник кроме сил $m\vec{g}$ и $\vec{I}_{кор}$ действует еще сила реакции связи $\vec{N}$, направленная вдоль нити (рис. 35б).

$$\vec{N} = \vec{N}_x + \vec{N}_y + \vec{N}_z = -N\frac{x}{l}\vec{i} - N\frac{y}{l}\vec{j} + N\frac{h-z}{l}\vec{k}.$$

Составляем дифференциальные уравнения движения маятника.

$$m\vec{a}_{отн} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{I}_{кор}.$$

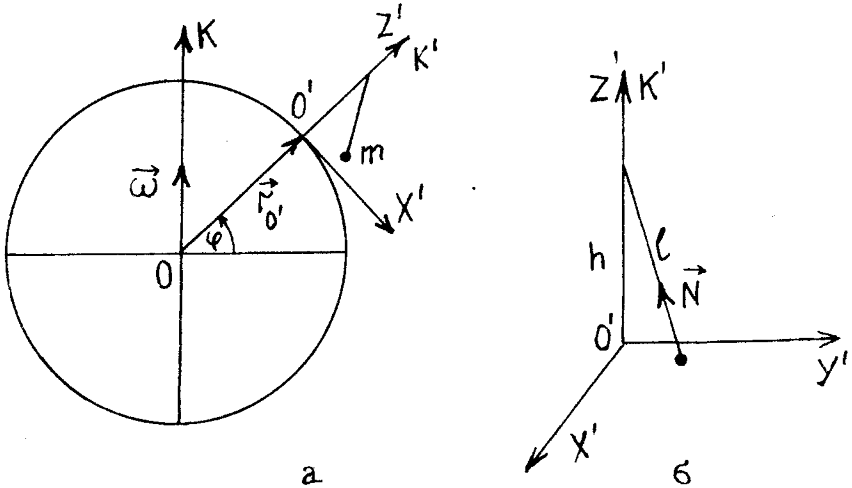


Рис.35

$$m\ddot{x} = -N\frac{x}{l} + 2m\omega\sin\varphi\cdot\dot{y},$$

$$m\ddot{y} = -N\frac{y}{l} - 2m\omega\sin\varphi\cdot\dot{x} - 2m\omega\cos\varphi\cdot\dot{z}, \qquad (23)$$

$$m\ddot{z} = -mg + N\frac{h-z}{l} + 2m\omega\cos\varphi\cdot\dot{y}.$$

Так как колебания малые, то можно считать, что численное значение силы реакции связи $N = mg$ (как в положении равновесия), а $z = \text{const} = 0$, т. е. точка m практически все время движется в плоскости $X'Y'$, а $\dot{z} = 0$. Другими словами, положение плоскости качания маятника определяется первыми двумя уравнениями (23), которые можно записать в виде.

$$\ddot{x} = -g\frac{x}{l} + 2\omega\sin\varphi\cdot\dot{y},$$

$$\ddot{y} = -g\frac{y}{l} - 2\omega\sin\varphi\cdot\dot{x}.$$

Умножим первое уравнение на $-y$, второе на x и сложим почленно. Получим

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = -2\omega\sin\varphi\,(x\dot{x} + y\dot{y})$$

или

$$\frac{d}{dt}(x\dot{y} - y\dot{x}) = -2\omega\sin\varphi\frac{d}{dt}\frac{x^2+y^2}{2}.$$

В этом выражении перейдем к полярным координатам (рис. 36)

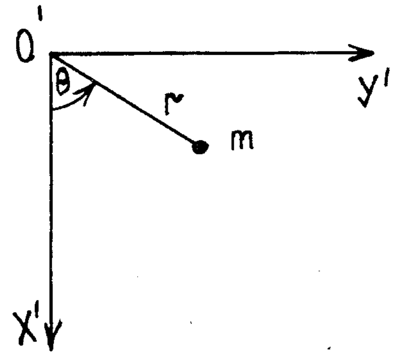


Рис.36

$$x = r\cos\theta, \quad \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\cdot\dot{\theta},$$
$$y = r\sin\theta, \quad \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\cdot\dot{\theta}.$$

Будем иметь

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = -2\omega\sin\varphi\frac{d}{dt}\left(\frac{r^2}{2}\right).$$

Умножив это выражение на dt и проинтегрировав, получим

$$r^2\dot{\theta} = -2\omega\sin\varphi\cdot\frac{r^2}{2} + C_1.$$

Пусть в начальный момент ($t_0 = 0$) маятник проходил через положение равновесия ($r_0 = 0$) с севера на юг ($\theta_0 = 0$). Тогда постоянная интегрирования $C_1 = 0$ и $\dot{\theta} = -\omega\sin\varphi$, откуда

$$d\theta = -\omega\sin\varphi\cdot dt,$$
$$\theta = -\omega\sin\varphi\cdot t + C_2, \quad C_2 = \theta_0 = 0$$

и

$$\theta = -\omega\sin\varphi\cdot t.$$

Со временем (t растет) θ уменьшается, т. е. плоскость качания маятника ($O'm$) поворачивается по часовой стрелке (с востока на запад) с угловой скоростью $\dot{\theta} = \omega\sin\varphi$. На полюсе Земли ($\varphi = 90°$) $\dot{\theta} = \omega = 15\,°/ч$.

16.8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ВРАЩЕНИЯ ЗЕМЛИ

Рассмотренные явления: отклонение падающих тел к востоку и вращение плоскости качания маятника — наблюдаются на опыте. Они подтверждают неинерциальность систем отсчета, закрепленных на Земле, и служат доказательством вращения Земли.

Особенно ярко это проявляется в опытах с маятником Фуко[1] (маятник, демонстрирующий вращение плоскости качания, назван по имени французского физика, впервые поставившего этот опыт в 1850 году).

[1] Фуко Жан Бернар Леон (1819—1868) — член Парижской АН (1865) и ряда иностранных АН.

§ 17. Задача двух тел (Кеплерова задача)

17.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ АБСОЛЮТНОГО ДВИЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ДВУХ ТЕЛ

Задачей двух тел называется задача о движении двух материальных точек под действием взаимной гравитационной силы. Внешних сил нет, система замкнута.

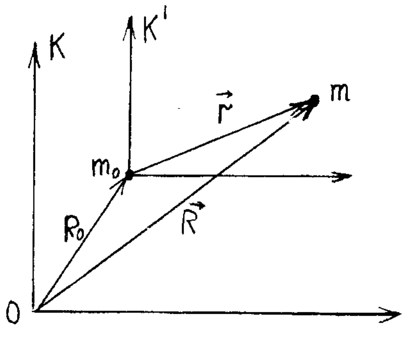


Рис.37

Эта задача называется также задачей Кеплера, так как ее впервые на примере Солнце — планета рассматривал Иоганн Кеплер. Задача распространяется на случай двух точечных зарядов (ядро атома — электрон), так как и в этом случае сила обратно пропорциональна квадрату расстояния между точками.

Эта задача служит основой небесной механики и теории движения искусственных спутников Земли и других космических объектов, используется при изучении движения электрона вокруг ядра атома и в теории столкновения заряженных частиц.

Пусть две точки с массами m_0 и m движутся под действием силы взаимного тяготения

$$\vec{F} = -\vec{F}_0 = -\frac{Gm_0 m}{r^3}\vec{r}$$

относительно ИСО K (рис. 37). Положение точек определяется радиусами-векаторами $\vec{R}_0$ и $\vec{R}$. Для каждой точки можно записать второй закон Ньютона

$$m\ddot{\vec{R}} = \vec{F}, \quad m_0\ddot{\vec{R}}_0 = \vec{F}_0. \qquad (24)$$

Это дифференциальные уравнения абсолютного движения точек в векторной форме.

17.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ДВУХ ТЕЛ

Обычно в задаче двух тел переходят к относительному движению (рис. 37). Подвижную систему K' выбирают следую-

щим образом: начало совмещают с точкой m_0, а оси направляют параллельно осям системы K. При таком выборе системы K' движение в задаче двух тел заменяется движением точки m в центральном поле, создаваемом гравитационной силой точки m_0.

Абсолютный радиус-вектор точки m и ее абсолютное ускорение равны

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{r}, \quad \vec{a}_{абс} = \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{отн}$$

или

$$\ddot{\vec{R}} = \ddot{\vec{R}}_0 + \ddot{\vec{r}},$$

где переносное ускорение точки m

$$\vec{a}_{пер} = \ddot{\vec{R}}_0 = \frac{\vec{F}_0}{m_0}.$$

(Ускорения Кориолиса нет, так как система K' не вращается). Выражение $\ddot{\vec{R}}$ подставим в первое уравнение (24), будем иметь

$$m(\ddot{\vec{R}}_0 + \ddot{\vec{r}}) = \vec{F},$$

откуда

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} - m\frac{\vec{F}_0}{m_0}.$$

Так как $\vec{F}_0 = -\vec{F}$, то

$$m\ddot{\vec{r}} = \frac{m_0 + m}{m_0}\vec{F}$$

или

$$\frac{m_0 m}{m_0 + m}\ddot{\vec{r}} = \vec{F}.$$

Это дифференциальное уравнение относительного движения точки m в векторной форме.

Переход к относительному движению приводит к «изменению» массы движущейся точки, величина

$$\frac{m_0 m}{m_0 + m}$$

называется приведенной массой точки m ($m_{пр}$). Приписав такую массу точке массы m будем иметь дифференциальное уравнение относительного движения в привычной форме второго закона Ньютона

$$m_{пр}\vec{a}_{отн} = \vec{F}.$$

Например, для электрона массы m_e, движущегося вокруг ядра массы $m_я$ в атоме водорода, нужно брать приведенную массу

$$m_{пр} = \frac{m_я m_e}{m_я + m_e} = \frac{1836 m_e m_e}{(1836+1)\, m_e} = \frac{1836}{1837}\, m_e,$$

если рассматривать движение электрона относительно ядра, а ядро считать неподвижным.

Для гравитационной силы дифференциальное уравнение относительного движения точки m обычно используется в следующем виде;

$$m\ddot{\vec{r}} = \frac{m_0 + m}{m_0}\left(-\frac{G m_0 m}{r^3}\vec{r}\right),$$

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{G(m_0+m)\,m}{r^3}\vec{r}.$$

В таком виде дифференциальное уравнение относительного движения точки имеет тот же вид, что и дифференциальное уравнение ее абсолютного движения (24) при условии, что масса притягивающего центра равна не m_0, а $m_0 + m$. Таким образом, задача двух тел сводится к задаче о движении точки в центральном поле с массой притягивающего центра $m_0 + m$ (§ 10, § 15) и полностью решается в общем виде. Сила, действующая на точку

$$\vec{F} = -\frac{G(m_0+m)\,m}{r^3}\vec{r}.$$

Потенциал силы

$$U = \frac{G(m_0+m)\,m}{r}.$$

Потенциальная энергия точки m

$$\Pi = -\frac{G(m_0+m)\,m}{r}.$$

Движение происходит по коническому сечению

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi},$$

p — пара́метр, e — эксцентриситет.

Первое теоретическое решение задачи двух тел принадлежит Ньютону.

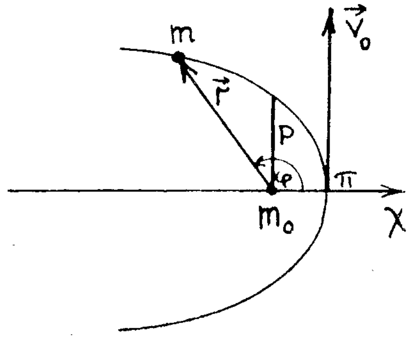
17.3. ИНТЕГРАЛ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ. КОСМИЧЕСКИЕ СКОРОСТИ

Запишем для точки массы m, движущейся в гравитационном поле точки массы m_0, закон сохранения механической энергии

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{G(m_0+m)\,m}{r} = E_0. \qquad (25)$$

Выразим начальную механическую энергию точки через большую полуось конического сечения, по которому она движется.

Пусть полярная ось направлена в вершину (перицентр) конического сечения (рис. 38) и пусть в начальный момент $t_0 = 0$ точка находилась в перицентре π. Тогда $r_0 = r_\pi$, $\varphi_0 = 0$. Вектор начальной скорости $\vec{v}_0 \perp \vec{r}_0$ и представляет собой поперечную составляющую скорости, т. е. $\dot{r}_0 = 0$, $r_0\dot{\varphi}_0 = v_0$ (из $\vec{v} = \dot{r}\vec{r}^0 + r\dot{\varphi}\vec{p}^0$). Параметр конического сечения



$$p = \frac{C^2}{G(m_0+m)}$$

Рис.38

(§ 10.5) выражается через постоянную площадей, которая находится из интеграла

$$r^2\dot{\varphi} = C: \quad C = r_0^2\dot{\varphi}_0 = r_0(r_0\dot{\varphi}_0) = r_0 v_0.$$

$$p = \frac{r_0^2 v_0^2}{G(m_0+m)}. \qquad (26)$$

Для того, чтобы выразить эксцентриситет конического сечения через v_0 и r_0, можно воспользоваться формулой из теории конических сечений для расстояния от фокуса до вершины

$$r_\pi = \frac{p}{1+e}.$$

$$e = \frac{p - r_0}{r_0},$$

откуда

$$e = \frac{r_0 v_0^2}{G(m_0+m)} - 1.$$

Подставив p и e, выраженные через начальные скорость и радиус-вектор точки, в выражение конического сечения точки, будем иметь

$$r = \frac{\dfrac{r_0^2 v_0^2}{G(m_0+m)}}{1 + \left(\dfrac{r_0 v_0^2}{G(m_0+m)} - 1\right)\cos\varphi}.$$

Получим теперь начальную механическую энергию точки m

$$E_0 = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{G(m_0+m)m}{r_0} = \frac{G(m_0+m)m}{2}\left(\frac{v_0^2}{G(m_0+m)} - \frac{2}{r_0}\right) =$$

$$= \frac{G(m_0+m)m}{2}\left(\frac{v_0^2 r_0^2}{G(m_0+m)r_0^2} - \frac{2}{r_0}\right) = \frac{G(m_0+m)m}{2}\left(\frac{p}{r_0^2} - \frac{2}{r_0}\right).$$

Вместо p и r_0 введем в эту формулу большую полуось a, используя

$$p = \pm a(1 - e^2),$$

и

$$r_0 = \frac{p}{1+e} = \pm a(1-e)$$

(«+» для эллипса, «−» для гиперболы), получим

$$E_0 = \pm\frac{G(m_0+m)m}{2a}$$

(«−» для эллипса, «+» для гиперболы).

Подставим в закон сохранения механической энергии точки (25) выражение E_0

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{G(m_0+m)m}{r} = \pm\frac{G(m_0+m)m}{2a}$$

и выразим из него квадрат скорости движущейся точки m

$$v^2 = G(m_0+m)\left(\frac{2}{r} \pm \frac{1}{a}\right).$$

Это выражение называется интегралом кинетической энергии. Оно определяет квадрат скорости точки массы m, движущейся по коническому сечению с большой полуосью a в центральном гравитационном поле, создаваемом точкой массы m_0 на расстоянии r от центра поля.

Знак «−» соответствует движению по эллипсу, знак «+» — по гиперболической орбите. В случае параболы $a = \infty$

Интеграл кинетической энергии позволяет определить космические скорости: круговую и параболическую.

Если орбита точки m — окружность, то $r = a$ и

$$v_{кр} = \sqrt{\frac{G(m_0+m)}{r}}.$$

Эта формула определяет круговую скорость точки m в гравитационном поле m_0.

Если орбита точки m — парабола, то $a = \infty$, интеграл кинетической энергии дает формулу параболической скорости точки m в гравитационном поле точки m_0:

$$v_{пар} = \sqrt{\frac{2G(m_0+m)}{r}}.$$

Круговая и параболическая скорости для $m \ll m_0$ служат характеристикой гравитационного поля точки m_0.

Круговая скорость, вычисленная по формуле

$$v_{кр} = \sqrt{\frac{Gm_0}{r}}$$

для поверхности сферического небесного тела радиуса R, называется первой космической скоростью для данного тела m_0:

$$v_{I} = \sqrt{\frac{Gm_0}{R}}.$$

Первая космическая скорость для Земли равна $v_{I\oplus} = 7{,}91$ км/с, для Солнца $v_{I\odot} = 436$ км/с.

Параболическая скорость, вычисленная для поверхности сферического небесного тела радиуса R по формуле

$$v_{пар} = \sqrt{\frac{2Gm_0}{R}},$$

называется второй космической скоростью для данного тела m_0. Вторая космическая скорость для Земли $v_{II\oplus} = 11{,}18$ км/с, для Солнца $v_{II\odot} = 619$ км/с. Вторая космическая скорость называется также критической скоростью, или скоростью улетучивания.

§ 18. О решении основной задачи механики для системы n точек

18.1. ЗАДАЧА n ТЕЛ И ТРЕХ ТЕЛ

Задачей n тел в небесной механике называется задача о движении свободной замкнутой системы n точек, между которыми действуют только гравитационные силы

$$\left(F_{i\nu} \sim \frac{1}{r_{i\nu}^2}\right).$$

Если $n = 3$, это задача трех тел. Обе эти задачи широко применяются в небесной механике. Так, Солнечная система — пример задачи n тел. Система Солнце — Земля — Луна — пример задачи трех тел.

Дифференциальные уравнения движения задачи n тел в ИСО имеют вид:

$$\begin{aligned} m_i\ddot{x}_i &= F_{ix}, \\ m_i\ddot{y}_i &= F_{iy}, \quad (3n \text{ уравнений}). \\ m_i\ddot{z}_i &= F_{iz}. \end{aligned}$$

Задача в общем виде полностью решается только для случая $n = 2$ (задача двух тел, § 17).

Для полного решения задачи n тел надо иметь $6n$ независимых первых интегралов или $3n$ независимых вторых интегралов. Для задачи трех тел это составляет соответственно 18 первых и девять вторых интегралов. Кроме того надо задать $6n$ начальных условий. Известно же всего десять интегралов: семь первых (интеграл энергии, три интеграла момента импульса (интегралы площадей), три интеграла импульса) и три вторых (интегралы движения центра массы системы).

На практике для решения задачи n тел и трех тел используются методы численного интегрирования.

18.2. О РЕШЕНИИ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ ДЛЯ НЕСВОБОДНОЙ СИСТЕМЫ ТОЧЕК

Если имеется система n точек с массами m_i, на которые действуют активные силы $\vec{F}_i$ (внутренние и внешние) и пассивные силы (силы реакции связей) $\vec{N}_i$ (внутренние и внешние), то для описания движения системы точек в инерциальной системе отсчета надо составить $3n$ дифференциальных уравнений движения в виде:

$$\begin{aligned} m_i\ddot{x}_i &= F_{ix} + N_{ix}, \\ m_i\ddot{y}_i &= F_{iy} + N_{iy}, \\ m_i\ddot{z}_i &= F_{iz} + N_{iz}, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \end{aligned} \tag{27}$$

В этих уравнениях кроме $3n$ координат точек системы x_i, y_i, z_i, которые должны быть найдены при интегрировании уравнений (27) в виде:

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(t,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{6n}), \\ y_i &= y_i(t,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{6n}), \\ z_i &= z_i(t,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{6n}), \end{aligned}$$

входят еще $3n$ заранее неизвестных проекций сил реакции связей N_{ix}, N_{iy}, N_{iz}, которые тоже должны быть найдены. Другими словами, при решении основной задачи механики для несвободной (связанной) системы n точек кроме чисто математических сложностей (интегрирование большого числа дифференциальных уравнений) возникают сложности чисто физико-технического характера — нахождение сил реакции связей, для чего следует добавить еще $3n$ уравнений. Основная задача механики для несвободной системы n точек методами силовой механики Ньютона полностью решена быть не может.

Несвободная система точек является объектом исследования в механике Лагранжа[1].

[1] Лагранж Жозеф Луи (1736—1813) — французский математик и механик, член Парижской АН (1772).

IV. ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

§ 19. Основные определения

19.1. НЕСВОБОДНАЯ СИСТЕМА ТОЧЕК. ВИДЫ СВЯЗЕЙ

Раздел классической механики — аналитическая механика занимается рассмотрением поведения несвободной системы материальных точек, на движение которых наложены ограничения. Это может быть осуществлено или путем непосредственного соприкосновения тел, или при помощи нерастяжимых нитей, или каким-нибудь другим способом. Все эти ограничения перемещений материальных точек можно характеризовать заданием некоторых дополнительных условий геометрического или кинематического характера, которые накладываются на радиусы-векторы и скорости этих материальных точек.

Таким образом, на каждую точку системы действуют заданные активные силы $\vec{F}_i$ (внешние и внутренние) и силы реакции связей $\vec{N}_i$ (внешние и внутренние), которые исчезают, если убрать связи. Силы реакции зависят от активных сил.

В качестве примера рассмотрим материальную точку массы m, движущуюся в заданном силовом поле $\vec{F}$ по поверхности сферы радиуса R. Дифференциальные уравнения движения такой точки можно записать следующим образом:

$$m\ddot{x} = F_x + N_x,$$
$$m\ddot{y} = F_y + N_y,$$
$$m\ddot{z} = F_z + N_z.$$

В этих уравнениях обычно известна только активная сила $\vec{F}$ и неизвестна сила реакции связей $\vec{N}$. Однако в нашем примере можно записать еще уравнение связи

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

Четырех уравнений недостаточно для решения задачи. Необходимо найти шесть неизвестных величин: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $N_x(t)$, $N_y(t)$, $N_z(t)$. Необходимы дополнительные сведения о конкретном характере связей. Последние можно заменить силами реакции.

Упростим задачу. Рассмотрим плоский маятник в поле силы тяжести (рис. 27). Тогда

$$\vec{F} = m\vec{g} \quad \text{и} \quad \vec{N} = -\lambda\vec{r},$$

где $\lambda(t)$ — неизвестная скалярная функция. Уравнения движения примут следующий вид

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{N},$$
$$x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

Эти уравнения содержат три неизвестные величины, решив их, находим уравнения движения точки $x = x(t)$, $y = y(t)$ и силу реакции

$$\vec{N} = -\lambda(t)\,\vec{r}.$$

Связи можно разделить на *голономные* и *неголономные*, *стационарные* и *нестационарные*, *удерживающие* и *неудерживающие*, а также *идеальные* и *реальные*.

Голономными (или геометрическими) называются такие связи, уравнения которых ограничивают координаты точек

$$f_k(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n, t) = 0, \qquad (28)$$
$$k = 1, 2, 3, \ldots, a,$$

где f_k — функции только координат и времени, a — число связей. Голономные связи накладывают ограничения и на скорости точек. Чтобы увидеть это, продифференцируем уравнения (28):

$$\frac{df_k}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i \frac{\partial f_k}{\partial \vec{r}_i} + \frac{\partial f_k}{\partial t} = 0, \qquad (29)$$
$$k = 1, 2, \ldots, a.$$

Последние выражения можно назвать дифференциальными уравнениями голономных связей. Если провести интегрирование, то можно получить вновь систему уравнений (28).

Неголономными, неинтегрируемыми, или кинематическими связями называют такие связи, уравнения которых не сводятся к виду (28). Примером таких связей могут быть связи, дифференциальные уравнения которых имеют вид

$$\sum_{i=1}^{n} (A_i\dot{x}_i + B_i\dot{y}_i + C_i\dot{z}_i) + D = 0,$$

где A_i, B_i, C_i и D — функции координат точек и времени.

Связь называют стационарной, если в ее уравнение явно не входит время, в противном случае связь называется нестационарной.

Удерживащими называют связи, задаваемые равенствами, а неудерживающие связи определяются неравенствами. Примером системы с неудерживающей связью может служить точка, движущаяся по сферической поверхности.

Для нее уравнение связи имеет вид

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant R.$$

Связь может быть идеальной и реальной. Точное определение идеальной связи будет дано позднее. Пока ограничимся случаем точки, движущейся по заданной поверхности или по заданной кривой. Связь в этом случае называют идеальной, если сила реакции связи направлена по нормали к этой поверхности или к этой кривой. Если сила реакции связи направлена под углом к нормали поверхности или кривой, то связь называется реальной. Такие связи имеют место, если учитывать силы трения.

19.2. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ТОЧЕК

В дальнейшем будем рассматривать только голономные, удерживающие связи. Любая связь накладывает определенные ограничения на бесконечно малые перемещения точек, происходящие за бесконечно малый промежуток времени Δt. Обозначим через $\Delta\vec{r}_i = \vec{v}_i \Delta t$ бесконечно малое перемещение i-ой точки системы, совместимое с наложенными на нее связями. Умножим уравнения (29) на Δt, тогда получим:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial \vec{r}_i} \Delta\vec{r}_i + \frac{\partial f_k}{\partial t} \Delta t = 0. \qquad (30)$$

Рассмотренные перемещения называются возможными перемещениями механической системы.

Если из этих перемещений выделить те, которые удовлетворяют уравнениям движения, то такие перемещения следует называть действительными перемещениями. Они совершаются под действием активных сил и сил реакции связей. В дальнейшем их будем обозначать через $d\vec{r}_i$.

Рассмотрим пример точки движущейся по какой-либо плоскости. Все ее возможные перемещения в любой момент времени лежат в этой плоскости, но только одно из них, направленное по касательной к траектории, является действительным.

Пусть $\Delta\vec{r}_i'$ и $\Delta\vec{r}_i$ два бесконечно близких возможных перемещения какой-нибудь точки. Разность этих перемещений называется виртуальным перемещением материальной точки. Его обозначают через $\delta\vec{r}_i$, то есть

$$\delta\vec{r}_i = \Delta\vec{r}_i' - \Delta\vec{r}_i.$$

Виртуальные перемещения удовлетворяют уравнениям:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial \vec{r}_i} \delta\vec{r}_i = 0,$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots, a),$$

которые получаются, если написать две системы уравнений (30) для бесконечно близких, но различных возможных перемещений и вычесть соответственно одну систему из другой. Полученную систему выражений можно получить и другим способом. Для этого надо рассматривать бесконечно малые возможные перемещения материальных точек при фиксированном моменте времени $t = \text{const}$, то есть как бы при застывших, неизменных связях. Для механических систем со стационарными связями понятия возможных и виртуальных перемещений совпадают.

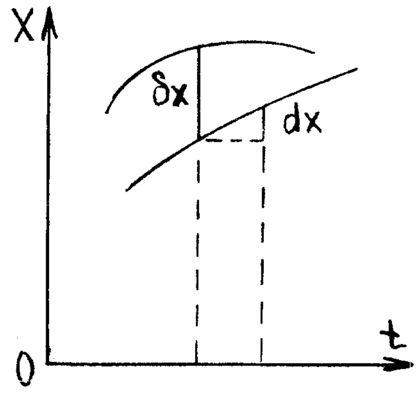


Рис.39

В математике виртуальные перемещения совпадают с вариациями функций. Так, $\delta\vec{r}_i$ есть вариация радиуса-вектора соответствующей точки. На (рис. 39) изображены две функции $x(t)$ и $x'(t)$, а также их вариация δx. Следует обратить внимание на разницу между дифференциалом dx и вариацией δx. В результате варьирования координаты всех точек механической системы получают приращения. Можно вычислить также приращения, которые получают любые функции

$$\delta f_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial \vec{r}_i} \delta\vec{r}_i.$$

19.3. ЧИСЛО СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Удерживающие связи приводят к уменьшению числа степеней свободы механической системы. Одна свободная материальная точка имеет три степени свободы. Ее положение в пространстве можно определить тремя координатами x, y и z. Система n свободных точек имеет $3n$ степеней свободы, их положение однозначно определяется заданием $3n$ независимых координат. Если на эту систему наложено a связей, то число независимых координат, определяющих положение этих точек, будет равно $3n - a$ — это и есть число степеней свободы для данной механической системы. Например, если рассмотреть две точки скрепленные жестким невесомым стержнем, то у такой системы имеется 5 степеней свободы. Это могут быть три координаты x, y, z, которые определяют положение одной материальной точки, и две координаты φ и ψ —углы, характеризующие поворот стержня в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Таким образом, эти координаты полностью задают положение обеих материальных точек в пространстве. Для трех точек число степеней свободы равно шести. Это же число степеней свободы определяет и положение твердого тела.

19.4. ПОСТУЛАТ ИДЕАЛЬНЫХ СВЯЗЕЙ

Работу активных сил $\vec{F}_i$ и сил реакций связи $\vec{N}_i$, приложенных к i-й точке, на ее виртуальном перемещении $\delta\vec{r}_i$ называют виртуальной работой. Она складывается из виртуальной работы активных сил и виртуальной работы сил реакции связей. Дадим более строгое определение идеальных связей. Это определение еще называют постулатом идеальных связей. *Идеальными, удерживающими связями называются такие связи, для которых сумма виртуальных работ всех сил реакции равна нулю на любом виртуальном перемещении системы*

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{N}_i\delta\vec{r}_i = 0. \qquad (31)$$

При движении точки по абсолютно гладкой поверхности виртуальные перемещения перпендикулярны к силам реакции. Следовательно, виртуальная работа этих сил равна нулю. Таким образом, прежнее определение идеальных связей оказывается включенным в новое более строгое определение.

§ 20. Принципы механики

20.1. ПРИНЦИП ВИРТУАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Принцип виртуальных перемещений, сформулированный И. Бернулли[1] в 1717 г., позволяет находить необходимые и

[1] Бернулли Иоганн (1667—1748) — голландский математик, механик.

достаточные условия равновесия для любой голономной механической системы с идеальными и стационарными связями.

Принцип гласит: для равновесия механической системы с голономными, идеальными, стационарными и удерживающими связями необходимо и достаточно, чтобы сумма виртуальных работ всех активных сил, действующих на систему, равнялась нулю на любом ее виртуальном перемещении

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\delta\vec{r}_i = 0.$$

Докажем необходимость. Пусть система находится в равновесии, тогда

$$\vec{F}_i + \vec{N}_i = 0,$$
$$i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Умножим каждое из уравнений скалярно на вариацию $\delta\vec{r}_i$ и сложим почленно все выражения

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\delta\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{N}_i\delta\vec{r}_i = 0.$$

Вторая сумма в случае идеальных связей равна нулю, так что получаем выражение принципа виртуальных перемещений. Доказательство достаточности можно провести от противного. Предположим, что математическое условие выполняется, однако тем не менее система вышла из состояния покоя и двигается. Действительные перемещения точек будут направлены по равнодействующим $\vec{F}_i + \vec{N}_i$ всех сил, приложенным к соответствующим точкам. Для стационарных связей виртуальные перемещения можно выбрать так, чтобы они совпадали с действительными. Поэтому слагаемые в сумме виртуальных работ будут иметь положительный знак

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i + \vec{N}_i)\,\delta\vec{r}_i > 0.$$

Если учесть условие идеальности связей, то

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\delta\vec{r}_i > 0,$$

что противоречит высказанному предположению. Следовательно, механическая система находится в равновесии.

В качестве примера рассмотрим равновесие рычага первого рода, (рис. 40). Запишем условие равновесия. Оно содержит только два слагаемых, так как имеются две активные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$,

$$\vec{F}_1\delta\vec{r}_1 + \vec{F}_2\delta\vec{r}_2 = 0.$$

Однако виртуальные перемещения $\delta\vec{r}_1$ и $\delta\vec{r}_2$ не являются независимыми. Выразим их через новую переменную $\delta\varphi$:

$$\delta r_1 = R_1\delta\varphi,$$
$$\delta r_2 = R_2\delta\varphi.$$

Вынесем $\delta\varphi$ за скобку

$$(F_1R_1 - F_2R_2)\,\delta\varphi = 0.$$

Так как $\delta\varphi$ — произвольная независимая величина, то ее можно выбрать отличной от нуля и следовательно выражение, стоящее в скобках, должно быть равно нулю. Отсюда окончательно получаем условие равновесия $F_1R_1 = F_2R_2$, известное из школьного курса физики. При решении задач с помощью принципа виртуальных перемещений не вводятся силы реакции, а используются только активные силы.

20.2. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА[1]

Успехи механики в решении статических задач привели Даламбера к мысли, что полученные методы можно использовать при решении задач динамики. Запишем второй закон Ньютона для каждой точки и перепишем полученные уравнения следующим образом

$$\vec{F}_i + \vec{N}_i - m_i\vec{a}_i = 0,$$
$$i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Формально эти уравнения теперь записаны как уравнения статики. Слагаемые вида $-m_ia_i$ называют силами инерции Даламбера. Они не тождественны истинным силам инерции, которые появляются в неинерциальных системах отсчета.

Если каждое из выписанных уравнений умножить на соответствующее виртуальное перемещение $\delta\vec{r}_i$ и все уравнения сложить, то получим

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\delta\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{N}_i\delta\vec{r}_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{a}_i\delta\vec{r}_i = 0.$$

[1] **Даламбер Жан Лерон (1717—1783) — французский математик и философ.**

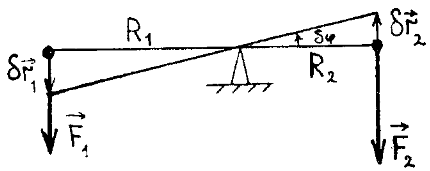


Рис.40

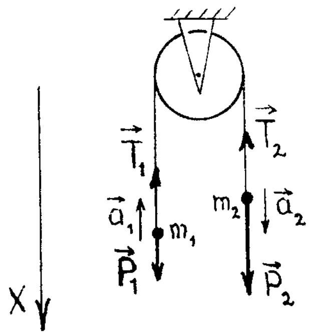


Рис.41

Вторая сумма обращается в нуль согласно постулату идеальных связей. Окончательно имеем

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i - m_i\vec{a}_i)\,\delta\vec{r}_i = 0. \tag{32}$$

Это дифференциальный вариационный принцип Даламбера-Лагранжа, который утверждает, что **если на механическую систему наложены удерживающие, голономные и идеальные связи, то сумма виртуальных работ всех активных сил и сил инерции Даламбера равна нулю для любого виртуального перемещения системы.** Полученное уравнение называют также общим уравнением динамики голономных систем.

В качестве примера рассмотрим хорошо известную машину Атвуда (рис. 41). Блок считаем невесомым. Все необходимые данные изображены на чертеже. Запишем уравнение (32)

$$m_1g\delta x_1 - m_1a_1\delta x_1 + m_2g\delta x_2 - m_2a_2\delta x_2 = 0.$$

Введем новую независимую координату s — путь, проходимый любой точкой системы. Выразим все переменные через эту координату

$$\delta x_2 = \delta s, \quad \delta x_1 = -\delta s,$$
$$a_2 = \ddot{x}_2 = \ddot{s}, \quad a_1 = \ddot{x}_1 = -\ddot{s}.$$

После этого уравнение примет вид

$$(-m_1g + m_2g - m_1\ddot{s} - m_2\ddot{s})\,\delta s = 0.$$

Так как δs — независимая величина, которая может быть отлична от нуля, то выражение в скобках равно нулю. Отсюда получаем ускорение системы

$$\ddot{s} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g.$$

Силы реакции при решении не используются. Для их нахождения воспользуемся принципом освобождаемости связей.

Сущность его сводится к тому, что связи удаляются из системы и вместо них вводятся силы реакции. Затем решается система уравнений динамики уже с большим числом неизвестных сил. В результате такого решения будут найдены силы реакции. В рассматриваемом примере такими силами являются силы натяжения нитей. Для их определения напишем следующую систему уравнений Ньютона

$$m_2 a_2 = P_2 - T_2,$$
$$m_1 a_1 = T_1 - P_1,$$

и равенства

$$T_2 = T_1 = T,$$
$$a_2 = a_1 = a.$$

Окончательно находим силы натяжения нитей

$$T = P_2 - m_2 a_2 = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

§ 21. Дифференциальные уравнения для несвободной системы точек

21.1. ОБОБЩЕННЫЕ КООРДИНАТЫ, ОБОБЩЕННЫЕ СИЛЫ И ОБОБЩЕННЫЕ СКОРОСТИ.

Обобщенными координатами механической системы называют любые s величин $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_s$, однозначно определяющих положение системы в пространстве. Число обобщенных координат совпадает с числом степеней свободы механической системы. Размерности обобщенных координат могут быть любыми. Это могут быть или линейные координаты, например x, y, z, или угловые, например α, β, γ.

Радиусы-векторы и декартовы координаты точек должны быть однозначными функциями обобщенных координат

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_s, t), \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n. \tag{33}$$

Обобщенные координаты механической системы должны быть выбраны в полном соответствии с наложенными на нее связями,

то есть уравнения связей должны обращаться в тождества при подстановке в них функций (33).

Можно выразить обобщенные координаты через радиусы-векторы материальных точек

$$q_\alpha = q_\alpha(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n, t), \quad \alpha = 1, 2, 3, \ldots, s.$$

Запишем принцип виртуальных перемещений через обобщенные координаты. Для этого выразим вариации зависимых координат через независимые виртуальные перемещения

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha. \tag{34}$$

Подставляя эти выражения в уравнение, выражающее принцип виртуальных перемещений, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha = 0.$$

Изменим порядок суммирования

$$\sum_{\alpha=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha = 0.$$

Введем обозначение

$$Q_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}. \tag{35}$$

Величину Q_α называют обобщенной силой.
Тогда принцип виртуальных перемещений записывается следующим образом

$$\sum_{\alpha=1}^{s} Q_\alpha \delta q_\alpha = 0.$$

Так как виртуальные перемещения δq_α независимы, то для того чтобы вся сумма при любых перемещениях была равна нулю необходимо, чтобы все обобщенные силы были равны нулю

$$Q_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3, \ldots, s.$$

Эти уравнения, не содержащие сил реакций связей, являются необходимыми и достаточными условиями равновесия произвольной голономной механической системы с идеальными и стационарными связями. Число указанных условий равновесия равняется числу степеней свободы механической системы, т. е. числу s.

Рассмотрим случай, когда все активные силы, действующие на систему, являются потенциальными

$$\vec{F}_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial \vec{r}_i},$$

где $\Pi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n)$ — потенциальная энергия системы. Подставим последнее выражение в (35) и воспользуемся правилами нахождения частных производных от сложных функций, тогда получим

$$Q_\alpha = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Pi}{\partial \vec{r}_i} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_\alpha}.$$

Условия равновесия после этих вычислений записываются в виде

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = \ldots = \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} = 0.$$

Механическая система в потенциальном силовом поле может находиться в состоянии равновесия только в том случае, если ее потенциальная энергия имеет стационарное значение (стационарная точка).

Различают четыре типа равновесных состояний: устойчивое, неустойчивое, безразличное и седлообразное. Положению устойчивого равновесия соответствует минимум потенциальной энергии. Максимум потенциальной энергии соответствует неустойчивому равновесию системы. В состоянии безразличного равновесия потенциальная энергия системы не изменяется при изменении ее конфигурации. Каждому из типов равновесия соответствует своя форма потенциальной поверхности $\Pi(q_1, q_2, \ldots, q_s) = \mathrm{const}$ в соответствующей точке. Так, например, безразличному равновесию соответствует плоская поверхность, неустойчивому — выпуклая поверхность, устойчивому — вогнутая поверхность. Очень интересно рассмотреть равновесие в окрестности седлообразной точки. Существует только одно направление, при движении по которому наблюдается устойчивое равновесие. Если же точку вывести из состояния равновесия в каком-либо другом направлении, то такое равновесие оказывается неустойчивым.

21.2. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА

Получим дифференциальные уравнения движения в обобщенных координатах. Они соответствуют уравнениям Ньютона, но зависят не от координат $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n$, а от обобщенных координат $q_1, q_2, \ldots, q_s$. Для этого выразим общее уравнение динамики (32) через обобщенные координаты, подставив в него $\vec{r}_i$ — (33) и $\delta\vec{r}_i$ — (34). В полученном выражении поменяем порядок суммирования по i и α

$$\sum_{\alpha=1}^{s} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} - \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{v}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right\} \delta q_\alpha = 0.$$

Первое слагаемое представляет собой обобщенные силы Q_α, второе слагаемое обозначим через

$$\mathrm{A}_\alpha = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{v}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}. \tag{36}$$

Получим дифференциальный вариационный принцип Даламбера-Лагранжа, выраженный через обобщенные координаты. Рассуждая так же как и в разделе 21.1 получим систему уравнений

$$\mathrm{A}_\alpha = Q_\alpha,$$
$$\alpha = 1, 2, 3, \ldots, s,$$

которая носит название уравнений Лагранжа второго рода.

Преобразуем выражения (36). Для этого воспользуемся правилом дифференцирования произведения, записав его в виде

$$v\,du = d(uv) - u\,dv.$$

Применим это правило к выражению, стоящему под знаком суммы (36)

$$m_i \dot{\vec{v}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt}\left(m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) - m_i \vec{v}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right).$$

В вычислениях использованы математические соотношения, полученные из радиусов-векторов путем их последовательного дифференцирования

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_\alpha}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_\alpha}.$$

Если применить правило дифференцирования квадрата функции и переставить порядок суммирования и дифференцирования, то получим

$$A_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{d}{dt}\left(m_i\vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - m_i\vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_\alpha} \right\} =$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} \right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha},$$

где T — кинетическая энергия системы, выраженная через обобщенные координаты и скорости.

Окончательно уравнения Лагранжа можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha, \qquad (37)$$

$$\alpha = 1, 2, 3, \ldots, s.$$

Это дифференциальные уравнения второго порядка. Число уравнений равно числу степеней свободы механической системы.

21.3. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА

Запишем уравнения Лагранжа для случая одной точки. За обобщенные координаты примем переменные x, y, z, тогда кинетическая энергия равна

$$T = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)/2.$$

Обобщенные силы совпадают с проекциями на координатные оси силы, действующей на точку

$$Q_1 = F_x \frac{\partial x}{\partial x} + F_y \frac{\partial y}{\partial x} + F_z \frac{\partial z}{\partial x} \text{ и т. д.}$$

Если теперь найти производные

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z},$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0,$$

то получаем уже известную систему уравнений Ньютона, § 7.1. Таким образом, если не учитывать связи, то уравнения Лагранжа совпадают с уравнениями Ньютона, обобщением которых они являются.

Математический маятник

Рассмотрим задачу о движении математического маятника, § 13.3. В качестве обобщенной координаты выберем угол φ (рис. 27). Тогда кинетическая энергия точки запишется следующим образом

$$T = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2}.$$

Для определения Q_φ найдем из рисунка $x = l\cos\varphi$ и одновременно учтем, что $F_x = mg$, $F_y = F_z = 0$. Тогда $Q_\varphi = -mgl\sin\varphi$. Уравнение Лагранжа примет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} \right) = -mgl\sin\varphi.$$

Легко видеть, что оно совпадает с уравнением математического маятника § 13.3.

21.4. ПОРЯДОК СОСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА

Разобранные примеры показывают, как надо решать задачи:

1. Выбрать обобщенные координаты.
2. Найти связь декартовых и обобщенных координат.
3. Выразить кинетическую энергию системы через обобщенные координаты.
4. Найти обобщенные силы.
5. Подставить кинетическую энергию и обобщенные силы в уравнения Лагранжа.
6. Решить полученные дифференциальные уравнения и найти зависимость введенных обобщенных координат от времени.

§ 22. Уравнения Лагранжа для потенциальных сил.

Задача составления уравнений Лагранжа упрощается, если в системе действуют потенциальные силы. Как уже было показано в § 21.1, потенциальные силы можно выразить через частные производные от потенциальной энергии по обобщенным координатам

$$Q_\alpha = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_\alpha}.$$

Подставим эти выражения в уравнения Лагранжа (37). Перенесем все слагаемые в одну сторону. А также добавим слагаемые вида

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_\alpha},$$

которые равны нулю, так как потенциальная энергия зависит только от положения точек (только от координат) и не зависит от скорости. Уравнения Лагранжа после этого примут вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}(T - \Pi) - \frac{\partial}{\partial q_\alpha}(T - \Pi) = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3, \ldots, s.$$

Введем обозначение $L = T - \Pi$ — разность кинетической и потенциальной энергии механической системы. $L(q_1, q_2, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s t)$ называют *функцией Лагранжа*, или лагранжианом механической системы. Таким образом, для случая потенциальных сил систему уравнений Лагранжа лучше записывать следующим образом

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0, \qquad (38)$$

где $\alpha = 1, 2, \ldots, s$, s — число степеней свободы. При решении уравнений (38) не надо определять обобщенные силы. Вместо этого необходимо вычислить потенциальную энергию системы, выразив ее через обобщенные координаты.

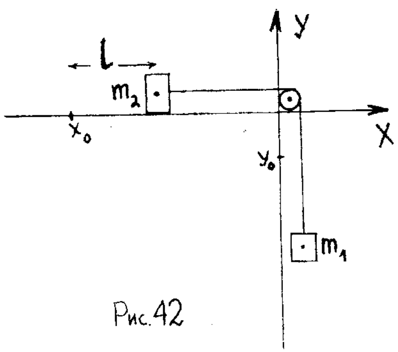


Рис.42

Пример. Пусть имеются два тела с массами m_1 и m_2, соединенные невесомой, нерастяжимой нитью, перекинутой через невесомый блок, (рис. 42) Одно из тел скользит без трения по горизонтальной плоскости. В качестве обобщенной координаты возьмем путь l, который проходит тело m_1. Тогда координаты x_2 и y_1 следующим образом выражаются через обобщенную координату

$$x_2 = x_0 + l, \quad y_1 = y_0 + l.$$

Кинетическая и потенциальная энергии системы равны

$$T = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{l}^2,$$

$$\Pi = -m_1 g(y_0 + l).$$

Получаем Лагранжиан

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{l}^2 + m_1 g(y_0 + l).$$

Подставляем его в уравнение

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{l}} - \frac{\partial L}{\partial l} = 0,$$

и находим ускорение материальных точек

$$\ddot{l} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}g.$$

Остается дважды проинтегрировать полученное выражение и определить постоянные интегрирования. Доведите решение до конца.

§ 23. Уравнение Лагранжа для систем с диссипативными силами.

В механике кроме потенциальных сил часто рассматриваются силы трения. Нетрудно видеть, что силу трения

$$\vec{F}_i^{(\text{Тр})} = -\alpha_i \vec{v}_i,$$

действующую со стороны вязкой среды на каждую точку системы, можно представить в виде

$$\vec{F}_i^{(\text{Тр})} = -\frac{\partial \Phi_i}{\partial \vec{v}_i}, \text{ где } \Phi_i = \frac{1}{2}\alpha_i v_i^2,$$

а α_i — коэффициент трения. Скалярную величину Φ_i называют диссипативной функцией Рэлея[1]. Для механической системы ее следует вычислять по формуле

$$\Phi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i^2.$$

Следовательно, обобщенные силы трения равны

$$Q_\alpha^{(\text{Тр})} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_\alpha}.$$

[1] Рэлей Джон Уильям (1842—1919) — английский физик.

Если в системе имеются и потенциальные силы, то их следует включить в функцию Лагранжа. С учетом тех и других сил уравнения Лагранжа принимают следующую форму

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_\alpha},$$
$$\alpha = 1, 2, 3, \ldots, s.$$

§ 24. Интегрирование уравнений Лагранжа

Уравнения Лагранжа — это обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка. Методы решения этих уравнений хорошо известны. Однако в ряде случаев можно получить результаты, не производя полного интегрирования уравнений. Оказывается, что законы сохранения, которые обычно используют для решения задач, являются первыми интегралами этих уравнений.

24.1. ОБОБЩЕННЫЕ ИМПУЛЬСЫ

Обобщенными импульсами механической системы называются скалярные величины, определяемые формулами

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha},$$
$$\alpha = 1, 2, 3, \ldots, s.$$

Вычислим обобщенные импульсы для изолированной точки. Так как $T = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)/2$ и $\Pi = 0$, то получаем

$$p_1 = m\dot{x}, \quad p_2 = m\dot{y}, \quad p_3 = m\dot{z}.$$

Эти выражения соответствуют обычному определению импульса точки. В случае вращательного движения (§ 13.3) за обобщенную координату следует выбрать угол φ. Тогда обобщенный импульс будет равен

$$p_\varphi = \sum_{i=1}^{n} R_i^2 m_i \dot{\varphi} = I_z \omega.$$

Он совпадает с моментом импульса системы точек.

Если обобщенная координата имеет размерность длины, то соответствующий ей обобщенный импульс имеет размерность обычного импульса, а если обобщенная координата выражена через угловую переменную, то обобщенный импульс имеет размерность момента импульса.

Обобщенная координата называется циклической в случае, когда она явно не входит в функцию Лагранжа, а входит лишь ее производная по времени (обобщенная скорость). Для такой координаты сохраняется соответствующий обобщенный импульс. Для подтверждения этого положения запишем уравнения Лагранжа (38) так, чтобы в них входили обобщенные импульсы

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}, \qquad (39)$$
$$\alpha = 1, 2, 3, \ldots, s.$$

Для циклических координат

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = 0$$

и, следовательно, $p = \mathrm{const}$, т. е. выполняется закон сохранения обобщенного импульса, который обобщает законы сохранения импульса и сохранения момента импульса.

24.2. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Найдем полную производную от функции Лагранжа механической системы

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\ddot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Заменим производные $\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$ и $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$ в соответствии с (39) и определением обобщенного импульса, тогда

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{dp_\alpha}{dt}\dot{q}_\alpha + p_\alpha \frac{d\dot{q}_\alpha}{dt}\right) + \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Перепишем полученное выражение следующим образом

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{d}{dt}(p_\alpha \dot{q}_\alpha) + \frac{\partial L}{\partial t},$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \dot{q}_\alpha - L\right) = \frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \qquad (40)$$

где введена новая функция

$$H = \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \dot{q}_\alpha - L,$$

которая называется функцией Гамильтона[1].

Из (40) получаем, что если функция Лагранжа не зависит явно от времени $\left(\frac{\partial L}{\partial t} = 0\right)$, то $\frac{dH}{dt} = 0$ и, следовательно, $H = \text{const}$, т. е. имеет место закон сохранения.

Вычислим функцию Гамильтона для свободной материальной точки

$$H = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} - m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)/2 + \text{П} = \text{Т} + \text{П}.$$

Мы видим, что в этом случае функция Гамильтона совпадает с полной механической энергией. Это можно доказать и в более общем случае, если исходить из следующей записи функции Гамильтона

$$H = \sum_{\alpha=1}^{s} \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - L$$

и использовать при этом то, что функция Лагранжа является однородной функцией второго порядка относительно обобщенных скоростей.

§ 25. Канонические уравнения Гамильтона

25.1. КАНОНИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Важную роль в физике играют уравнения Гамильтона. В этих уравнениях используется функция Гамильтона, которая выражается через независимые переменные — обобщенные координаты и обобщенные импульсы. Для геометрической интерпретации движения механической системы вводится понятие о фазовом пространстве. Под фазовым пространством понимается $2s$ — мерное пространство, по осям координат которого откладываются значения обобщенных координат q_α и обобщенных импульсов p_α. Каждой точке фазового пространства соответствует определенное состояние системы. Движение системы однозначно отображается в этом пространстве в виде фазовой траектории.

[1] Гамильтон Уильям Роуан (1805—1865) — английский математик.

25.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В КАНОНИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Уравнения Гамильтона можно получить, если найти дифференциал функции Лагранжа и затем перейти от переменных q_α и $\dot{q}_\alpha$ к переменным q_α и p_α.

Запишем полный дифференциал функции Лагранжа как дифференциал от обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени

$$dL = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} d\dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Преобразуем полученное выражение, используя уравнения (39) и определение обобщенного импульса

$$dL = \sum_{\alpha=1}^{s} \dot{p}_\alpha dq_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha d\dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

Найдем также дифференциал от выражения

$$d\sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \dot{q}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha d\dot{q}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s} \dot{q}_\alpha dp_\alpha.$$

Вычтем из последнего выражения предыдущее, тогда в левой стороне равенства получится дифференциал от функции Гамильтона

$$dH = d\left(\sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \dot{q}_\alpha - L\right) = \sum_{\alpha=1}^{s} \dot{q}_\alpha dp_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{s} \dot{p}_\alpha dq_\alpha - \frac{\partial L}{\partial t} dt.$$

С другой стороны его можно записать следующим образом

$$dH = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} dp_\alpha + \frac{\partial H}{\partial t} dt.$$

Из сравнения обоих дифференциалов получаем следующие равенства

$$\begin{cases} \dot{q}_\alpha = \dfrac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \\ \dot{p}_\alpha = -\dfrac{\partial H}{\partial q_\alpha}, \end{cases} \qquad (41)$$

где $\alpha = 1, 2, 3, \ldots, s,$

и

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Первые $2s$ уравнений это и есть канонические уравнения Гамильтона. Они представляют собой систему $2s$ дифференциальных уравнений первого порядка относительно $2s$ неизвестных функций $q_\alpha(t)$ и $p_\alpha(t)$. Следует обратить внимание на симметрию этих уравнений относительно переменных q_α и p_α.

В качестве примера рассмотрим составление уравнений Гамильтона для свободной материальной точки, находящейся в потенциальном поле. За обобщенные координаты примем переменные x, y и z. Используя выражение для кинетической энергии, найдем обобщенные импульсы

$$p_x = m\dot{x}, \quad p_y = m\dot{y}, \quad p_z = m\dot{z}.$$

Тогда кинетическую энергию можно записать следующим образом

$$T = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m.$$

Находим Гамильтониан

$$H = T + \Pi = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m + \Pi(x, y, z)$$

и подставляем его в уравнения, получаем

$$p_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad \dot{x} = \frac{p_x}{m},$$

$$p_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad \dot{y} = \frac{p_y}{m},$$

$$p_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}, \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m}.$$

Из этих уравнений можно находить или координаты x, y, z или импульсы p_x, p_y, p_z в зависимости от условий конкретной задачи.

§ 26. Интегрирование уравнений Гамильтона

26.1. ЦИКЛИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ

Дальнейшие рассуждения полностью аналогичны тем, что были сделаны в механике Лагранжа. Циклическими называются такие координаты, от которых не зависит функция

Гамильтона, т. е. $\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = 0$ и, следовательно, из уравнений Гамильтона получаем

$$\dot{p}_\alpha = 0, \quad \text{и} \quad p_\alpha = \text{const}.$$

Таким образом обобщенный импульс циклической координаты сохраняется.

26.2. ИНТЕГРАЛ ЭНЕРГИИ

Найдем полную производную по времени от функции Гамильтона

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\frac{dq_\alpha}{dt} + \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\frac{dp_\alpha}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Подставим в это выражение $\dot{q}_\alpha$ и $\dot{p}_\alpha$, найденные из уравнений Гамильтона, тогда

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right) + \frac{\partial H}{\partial t} = 0 + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Если функция Гамильтона не зависит явно от времени, то $H = \text{const}$.

Таким образом, в случае потенциальных сил в механической системе с идеальными, удерживающими, голономными связями полная энергия сохраняется, если гамильтониан не зависит явно от времени.

§ 27. Принцип Гамильтона-Остроградского[1]

Познакомимся еще с одним принципом, сыгравшим важную роль в развитии физики. Вначале введем понятие о конфигурационном пространстве. Пространством конфигураций механической системы будем называть $s+1$ — мерное пространство обобщенных координат $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_s$ и времени. Каждая точка в этом пространстве изображает определенную конфигурацию системы в данный момент времени t.

Пусть за время $t_2 - t_1$ система переходит из некоторой конфигурации A в новую конфигурацию B (Рис. 43). Это может быть осуществлено различными способами. Возникает вопрос, как

[1] Остроградский Михаил Васильевич (1801—1862) — русский математик.

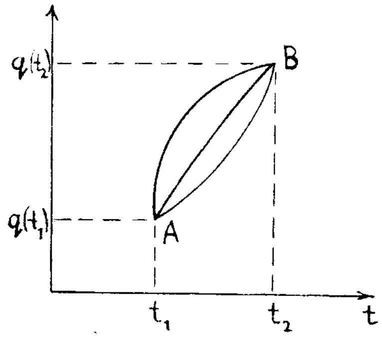


Рис.43

из множества возможных путей перехода механической системы, допускаемых наложенными на нее связями, отобрать тот, который реально осуществляется. Ответ на это дает принцип Гамильтона-Остроградского.

В случае голономных механических систем с идеальными связями и потенциальными активными силами из множества возможных путей перехода механической системы из одной ее конфигурации A в другую конфигурацию B реально осуществляется только тот путь, которому соответствует экстремальное (как правило, минимальное) значение функции действия, определяемой выражением

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s, t)\, dt.$$

Принцип Гамильтона-Остроградского еще называют принципом экстремального (или наименьшего) действия. Для того, чтобы определить минимум какой-либо функции нужно вариацию этой функции приравнять нулю.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1 + \delta q_1, q_2 + \delta q_2, \ldots, q_s + \delta q_s, \dot{q}_1 + \delta\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s +$$

$$+ \delta\dot{q}_s, t)\, dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s, t)\, dt = 0.$$

Возникающую при этом разность можно преобразовать следующим образом

$$\delta S = \sum_{\alpha=1}^{s} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta \dot{q}_\alpha \right) dt.$$

Здесь использованы первые члены ряда Тейлора[1].
Второй интеграл проинтегрируем по частям

[1] Тейлор Брук (1685—1731) — английский математик.

$$\delta S = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \Big|_{t_1}^{t_2} + \sum_{\alpha=1}^{s} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \delta q_\alpha dt.$$

Первое слагаемое в полученном выражении равно нулю, так как все траектории в пространстве конфигураций начинаются в точке A и кончаются в точке B. Следовательно, вариации координат в этих точках равны нулю. Остается следующее выражение

$$\delta S = -\int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^{s} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \right) \delta q_\alpha dt.$$

В круглых скобках стоят левые части уравнений Лагранжа, поэтому вариация действия равна нулю.

Проведенные вычисления доказывают необходимость условия $\delta S = 0$. Если проделать выкладки в обратном порядке, то можно доказать и достаточность выведенного условия.

Преимущество принципа Гамильтона-Остроградского заключается в его независимости от конкретного выбора системы обобщенных координат и, следовательно, от выбора системы отсчета. Это дает преимущество при рассмотрении каких-либо задач механики в неинерциальных системах отсчета. Другое его достоинство состоит в том, что принцип нетрудно распространить на системы, имеющие бесконечно большое число степеней свободы. Это важно в других разделах теоретической физики.

ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ЧТЕНИЯ

Голубева О. В. Теоретическая механика. М.: Высш. шк., 1968; 1976.

Жирнов Н. И. Классическая механика. М.: Просвещение, 1980.

Мултановский В. В. Курс теоретической физики, ч. I. М.: Просвещение, 1988.

Ольховский И. И. Курс теоретической механики для физиков. М.: Наука, 1970.

Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике.

Космодемьянский А. А. Курс теоретической механики. М.: Учпедгиз, 1955; ч. I. М.: Просвещение, 1965.

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. I, Механика. М.: Наука, 1965.

Разбитная Евгения Петровна
Захаров Вадим Сергеевич

ОСНОВЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Учебное пособие
для педагогических вузов

Редактор – Канаева М.Л.

Подписано в печать 1.09.98	Формат 60x84 /16
Бумага офсетная № 1	Печать трафаретная
Усл.печ.л. 7,03	Уч.-изд.л. 7,25
Тираж 200 экз.	Цена договорная
Заказ № R55-98	

Отпечатано в издательской лаборатории ВГПУ
600024, г.Владимир, проспект Строителей, д.11, к.113
Тел.: (0922) 33-87-92